DINCĂ G.

OPERATORI MONOTONI ÎN TEORIA PLASTICITĂȚII

Scanned with OKEN Scanner

G. DINCĂ

OPERATORI MONOTONI ÎN TEORIA PLASTICITĂŢII

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREŞTI, 1972

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Această lucrare este guvernată de două idei:

1) obținerea de teoreme de existență și unicitate pentru problemele la limită ale teoriei plasticității a lui Hencky-Nadai;

2) realizarea numerică a soluțiilor a căror existență și unicitate a fost demonstrată.

Vom spune cîteva cuvinte despre modul în care au fost realizate aceste idei.

În ceea ce privește teoremele de existență și unicitate, sînt demonstrate existența și unicitatea soluțiilor generalizate (în sens Sobolev) pentru unele dintre problemele la limită ale teoriei Hencky-Nadai și, de asemenea, existența și unicitatea soluției clasice pentru problema torsiunii elasto-plastice [24i], [42b].

Iată problemele cu semnificație mecanică pentru care a fost demonstrată existența și unicitatea soluției în sens Sobolev: prima problemă la limită (problema lui Dirichlet) pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai [24c], problema lui Dirichlet pentru operatorul teoriei fluajului neliniar staționar și izotrop [24b], problema torsiunii în teoria Hencky-Nadai [42e], problema încovoierii plăcilor elasto-plastice încastrate [47b], problema marilor deformări ale firelor ecruisabile [24a].

Obținerea existenței și unicității soluțiilor generalizate pentru aceste probleme este o consecință a teoremei variaționale a lui Langenbach. Pentru operatorii care posedă diferențială în sens Gâteaux pozitiv definită pe mulțimea funcțiilor admisibile pentru problema la limită considerată, teorema lui Langenbach are același rol ca binecunoscuta teoremă a lui Mihlin stabilită pentru operatori liniari și pozitiv definiți.

În ceea ce privește teorema de existență și unicitate a soluției clasice pentru problema torsiunii elasto-plastice, ea a fost obținută cu o tehnică proprie teoriei Leray-Schauder.

În toate cazurile în care am demonstrat existența și unicitatea soluției în sensul lui Sobolev, am demonstrat de asemenea unicitatea soluției în sens clasic, în ipoteza că ea există. Acest rezultat este o consecință a faptului că operatorii considerați sînt strict monotoni în sensul lui Minty-Browder pe mulțimea funcțiilor admisibile.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra acest din urmă fapt, a fost necesară obținerea de inegalități diferențiale care au jucat pentru problemele considerate același rol ca inegalitățile de tip Korn pentru problemele analoage ale teoriei elasticității liniare și izotrope.

În ceea ce privește realizarea numerică a soluțiilor, vom spune următoarele: soluțiile generalizate ale problemelor considerate au fost obținute ca limite în $L_2(\Omega)$ (sau $\mathbf{L}_2(\Omega)$) a oricărui șir minimizant pentru o funcțională atașată fiecărei probleme considerată, grație teoremei variaționale a lui Langenbach, și deci, construcția unei aproximante a soluției revine la construirea termenului de un anumit ordin al unui șir minimizant. Am făcut aceasta cu ajutorul unei metode de tip Ritz, raționamentul fiind condus pînă la o problemă care poate fi programată pentru o mașină electronică de calcul.

Încă o chestiune: soluția generalizată fiind un element al lui $L_2(\Omega)$ (sau $\mathbf{L}_2(\Omega)$), se pune problema regularității acestei soluții. La această chestiune am răspuns demonstrînd că soluția aparține unui spațiu energetic al problemei neliniare considerate și a cărui normă este echivalentă cu norma unui anumit spațiu Sobolev $W_p^k(\Omega)$ și, de asemenea, semnalînd posibilitatea utilizării unei idei a lui Langenbach fondată pe o tehnică a spațiilor Orlicz.

Închei aceste rînduri exprimînd mulțumiri profesorilor mei de la Facultatea de matematică-mecanică a Universității din București, care au contribuit la formarea mea matematică.

G. DINCĂ

Tabla de materii

Pag.

Capitolul I. **Dualitate. Teoreme de potenţialitate** 9

§ 1.1. Dualitate 9
§ 1.2. Cîteva noţiuni de calcul diferenţial în spaţii Banach [66f] 14
§ 1.3. Operatori potenţiali. Teoreme de potenţialitate 22

Capitolul II. **Proprietăţi extremale ale funcţionalelor neliniare** 51

§ 2.1. Condiţii suficiente pentru slab inferior semicontinuitatea funcţionalelor neliniare pentru spaţii Banach reflexive [66f] [46b] 51
§ 2.2. Funcţionale cu proprietatea „*m*" [66f] 68
§ 2.3. Teorema variaţională a lui Langenbach 74
§ 2.4. Extinderi ale teoremei lui Langenbach 89
§ 2.5. Construcţie şirului minimizant pentru funcţionala F 104
§ 2.6. Spaţii energetice pentru probleme neliniare 109

Capitolul III. **Operatori monotoni în sensul lui Minty-Browder** 117

§ 3.1. Consideraţii preliminare 117
§ 3.2. Teorema de surjectivitate a lui Browder [15 h] 119
§ 3.3. Teoreme de punct fix pentru operatori neexpansivi 131
§ 3.4. Un exemplu de aplicaţie monotonă surjectivă : aplicaţie de dualitate . . . 138

Capitolul IV. **Cîteva rezultate din teoria gradului topologic** 147

§ 4.1. Operatorul regularizant al lui Sobolev 147
§ 4.2. Operatorul de medie al lui Sobolev 150
§ 4.3. Derivate generalizate (derivate în sens Sobolev) 156
§ 4.4. Gradul lui Brouwer al unei aplicaţii continue a unui spaţiu de dimensiune finită în el însuşi [34], [56] 169
§ 4.5. Cîteva proprietăţi ale gradului lui Brouwer 193
§ 4.6. Noţiunea de indice al unei aplicaţii continue 199
§ 4.7. Cîteva rezultate din teoria Leray-Schauder a ecuaţiilor funcţionale . . . 212

Capitolul V. **Teoreme de existenţă şi unicitate în teoria Hencky-Nadai** 227

§ 5.1. Soluţii generalizate (în sens Sobolev) în teoria Hencky-Nadai 227

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 5.2. Realizarea numerică a metodei variaționale pentru funcționala teoriei Hencky-Nadai 285
§ 5.3. Soluții exacte în teoria Hencky-Nadai. Problema torsiunii elasto-plastice 324
§ 5.4. Rolul teoremelor de existență în obținerea unor rezultate calitative în teoria Hencky-Nadai 335

Capitolul VI. **Cîteva idei privind utilizarea spațiilor Orlicz în probleme de regularizare pentru soluțiile generalizate în sens Sobolev ale unor probleme din teoria plasticității** 345

§ 6.1. Cîteva idei privind teoremele de regularizare pentru soluțiile generalizate în teoria Hencky-Nadai 345
§ 6.2. N-funcții 346
§ 6.3. Spații Orlicz 351
§ 6.4. Funcționale liniare și mărginite pe $L_M^*(G)$ 357
§ 6.5. N-funcții și reprezentarea funcționalelor teoriei de plasticitate a lui Hencky-Nadai 358

Bibliografie 365

Opérateurs monotones dans la théorie de la plasticité 371

Dualitate. Teoreme de potenţialitate

Cadrul în care vor fi făcute consideraţiile ulterioare este cel al spaţiilor Banach reflexive şi reale. Nu este cel mai general cadru în care aceste consideraţii pot fi făcute. Este însă suficient de general pentru aplicaţiile ce le vom da în partea a doua a lucrării, aplicaţii corespunzătoare unor fenomene fizice concrete din teoria plasticităţii.

§ 1.1. Dualitate [15 h]

Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real, X^* dualul său, 2^{X^*} mulţimea părţilor lui X^*. Pentru orice pereche $x \in X$, $x^* \in X^*$, vom nota

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

În acest paragraf va fi construită aplicaţia de dualitate de la X la 2^{X^*} şi vor fi obţinute unele proprietăţi imediate ale acestei aplicaţii, proprietăţi ce vor servi dezvoltărilor ulterioare din acest capitol. După cum se va vedea în capitolul trei, în cazul în care X^* este strict convex, aplicaţia de dualitate oferă un exemplu foarte important, şi foarte comod în acelaşi timp, de aplicaţie surjectivă şi monotonă în sensul lui Minty-Browder a lui X pe X^* (a se vedea teorema lui Beurling şi Livingston din cap. III).

Existenţa aplicaţiei de dualitate este o consecinţă a teoremei Hahn-Banach. De aceea, începem prin a reaminti această teoremă.

Teorema 1.1.1. (Hahn-Banach). *Fie X un spaţiu vectorial normat şi real şi fie f o funcţională liniară şi continuă pe un subspaţiu M al lui X. Există o funcţională liniară şi continuă $\mathcal{F}$ pe X a cărei restricţie la M este f şi care are aceeaşi normă cu f.*

Fie φ o funcţie numerică definită pe $0 \leqslant r < \infty$ şi având următoarele proprietăţi :

1°. φ este continuă şi strict crescătoare ;

2°. $\varphi(0) = 0$;

3°. $\varphi(r) \to \infty$ cu $r \to \infty$.

DEFINIȚIA 1.1.1. Aplicația $J : X \to 2^{X^*}$ se numește *aplicație de dualitate* construită cu funcția de normalizare φ, dacă are următoarele proprietăți:

1°. oricare ar fi $u^* \in Ju$,

$$\langle u^*, u\rangle = \varphi(\|u\|)\,\|u\|; \tag{1.1.1}$$

2°. $$\|u^*\| = \varphi(\|u\|). \tag{1.1.2}$$

Raționamentul care urmează va dovedi că, într-adevăr, existența unei asemenea aplicații J este o consecință a teoremei Hahn-Banach.

Fie $u \in X$ și următorul subspațiu al lui X:

$$M = \{x \mid x = \xi u,\ \xi \in R\}. \tag{1.1.3}$$

Este evident că orice element al acestui subspațiu se reprezintă în mod unic sub forma ξu cu ξ real.

Fie ψ funcționala definită pe M astfel:

$$x \in M, \quad x \xrightarrow{\psi} \psi(x) = \varphi(\|u\|)\,\xi\|u\|, \tag{1.1.4}$$

unde ξ este numărul real cu ajutorul căruia x se scrie în mod unic $x = \xi u$.

Se verifică imediat că ψ este o funcțională liniară și mărginită pe M și că

$$\|\psi\| = \varphi(\|u\|). \tag{1.1.5}$$

După teorema Hahn-Banach, există o funcțională u^* ce extinde pe ψ la X cu păstrarea normei, deci care ia în $u \in M$ aceeași valoare ca ψ,

$$\langle u^*, u\rangle = \psi(u) = \psi(1\cdot u) = \varphi(\|u\|)\cdot 1\cdot\|u\| = \varphi(\|u\|)\,\|u\| \tag{1.1.6}$$

și, în plus,

$$\|u^*\| = \|\psi\| = \varphi(\|u\|). \tag{1.1.7}$$

Din (1.1.6) și (1.1.7) rezultă

$$\langle u^*, u\rangle = \|u^*\|\,\|u\|. \tag{1.1.8}$$

Așadar, cu construcția de mai sus, am obținut o funcțională liniară și mărginită pe X, deci un element din X^*, care satisface condițiile 1° și 2° impuse de definiția aplicației de dualitate.

În general, însă, funcționala u^* nu este unica cu aceste proprietăți. Aceasta, deoarece ea a fost obținută ca extensie prin teorema Hahn-

Scanned with OKEN Scanner

Banach a funcționalei ψ de la subspațiul M al lui X la X, iar teorema Hahn-Banach nu garantează și unicitatea acestei extensii.

Să notăm, din această cauză,

$$Ju = \{u^* \mid u^* \in X^*, \langle u^*, u\rangle = \varphi(\|u\|)\,\|u\|,\ \|u^*\| = \varphi(\|u\|)\} \tag{1.1.9}$$

TEOREMA 1.1.2. *Oricare ar fi $u \in X$, Ju este o mulțime convexă în X^*.*

Demonstrație. Să remarcăm, mai întîi, că din definiția lui Ju rezultă că, oricare ar fi $u^* \in Ju$, avem

$$\langle u^*, u\rangle = \varphi(\|u\|)\,\|u\|, \tag{1.1.10}$$

$$\|u^*\| = \varphi(\|u\|). \tag{1.1.11}$$

Fie u_1^* și u_2^* două elemente arbitrare ale lui Ju. Vom dovedi că pentru orice $t \in [0, 1]$,

$$tu_2^* + (1 - t)\,u_1^* \in Ju.$$

Într-adevăr, ținînd seama că u_1^* și u_2^* satisfac (1.1.10), avem

$$\langle tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*, u\rangle = \varphi(\|u\|)\,\|u\|. \tag{1.1.12}$$

Pe de altă parte, din (1.1.12) urmează că pentru orice $u \neq \theta$, avem

$$0 < \varphi(\|u\|) = \left\langle tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle = \left|\left\langle tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle\right|,$$

și deci

$$\varphi(\|u\|) = \left|\left\langle tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\| = 1}} |\langle tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*, v\rangle| = \|tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*\|.$$

Așadar,

$$\varphi(\|u\|) \leqslant \|tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*\|. \tag{1.1.13}$$

Cum însă $u_1^*,\ u_2^* \in Ju$, avem

$$\|u_1^*\| = \|u_2^*\| = \varphi(\|u\|)$$

și deci

$$\|tu_2^* + (1 - t)\,u_1^*\| \leqslant t\|u_2^*\| + (1 - t)\,\|u_1^*\| = \varphi(\|u\|). \tag{1.1.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1.1.13) şi (1.1.14) rezultă

$$\|tu_2^* + (1-t)\,u_1^*\| = \varphi(\|u\|) \tag{1.1.15}$$

Din (1.1.9), (1.1.12) şi (1.1.15) rezultă că pentru orice $u_1^*, u_2^* \in Ju$ şi orice $t \in [0, 1]$, $tu_2^* + (1-t)\,u_1^* \in Ju$.

Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.1.3. *Fie u şi v două elemente din X. Oricare ar fi $u^* \in Ju$, $v^* \in Jv$, avem*

$$\langle u^* - v^*,\ u - v\rangle \geqslant 0, \tag{1.1.16}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, ţinînd seama de definiţia lui Ju respectiv Jv (a se vedea (1.1.9)), rezultă:

$$\begin{aligned}\langle u^* - v^*, u - v\rangle &= \langle u^*, u\rangle + \langle v^*, v\rangle - \langle u^*, v\rangle - \langle v^*, u\rangle \geqslant \\ &\geqslant \langle u^*, u\rangle + \langle v^*, v\rangle - |\langle u^*, v\rangle| - |\langle v^*, u\rangle| \geqslant \\ &\geqslant \langle u^*, u\rangle + \langle v^*, v\rangle - \|u^*\|\,\|v\| - \|v^*\|\,\|u\| = \\ &= \varphi(\|u\|)\,\|u\| + \varphi(\|v\|)\,\|v\| - \varphi(\|u\|)\,\|v\| - \\ &- \varphi(\|v\|)\,\|u\| = (\varphi(\|u\|) - \varphi(\|v\|))\,(\|u\| - \|v\|) \geqslant 0,\end{aligned}$$

ultima inegalitate fiind consecinţă a faptului că φ este strict crescătoare.

DEFINIŢIA 1.1.2. Un spaţiu Banach real X se zice *strict convex* dacă oricare ar fi $u_1, u_2 \in X$ cu $u_1 \neq u_2$ şi $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$, şi oricare ar fi t, $0 < t < 1$,

$$\|tu_2 + (1-t)\,u_1\| < 1. \tag{1.1.17}$$

TEOREMA 1.1.4. *Dacă X^* este strict convex, atunci oricare ar fi $u \in X$, Ju conţine un singur element.*

Demonstraţie. Fie că Ju ar conţine cel puţin două elemente u_1^*, u_2^*, $u_1^* \neq u_2^*$.

Cum Ju este convexă (vezi teorema anterioară), pentru orice t cu $0 < t < 1$, $tu_2^* + (1-t)\,u_1^* \in Ju$, şi deci

$$\|tu_2^* + (1-t)\,u_1^*\| = \varphi(\|u\|). \tag{1.1.18}$$

Pe de altă parte, cum $u_1^*, u_2^* \in Ju$, avem şi

$$\|u_1^*\| = \|u_2^*\| = \varphi(\|u\|). \tag{1.1.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1.1.19), ținînd seama că X^* este strict convex, rezultă că, pentru orice t, $0 < t < 1$, avem

$$\|tu_2^* + (1-t)\,u_1^*\| < \varphi(\|u\|), \tag{1.1.20}$$

ceea ce contrazice (1.1.18) și deci presupunerea că Ju ar conține mai mult decît un singur element este falsă.

Așadar, în cazul în care X^* este strict convex, aplicația de dualitate corespunzătoare funcției de normalizare φ este definită de la X la X^* ($J : X \to X^*$) și conform teoremei (1.1.3), oricare ar fi $u, v \in X$, avem

$$\langle Ju - Jv,\ u - v\rangle \geqslant 0. \tag{1.1.16'}$$

În definitiv, am obținut următorul rezultat:

TEOREMA 1.1.5. *Fie X un spațiu Banach real al cărui dual X^* este strict convex. Fie φ o funcție numerică definită pe $0 \leqslant r < \infty$ și avînd următoarele proprietăți:*

1°. *φ este continuă și strict crescătoare;*

2°. $\varphi(0) = 0$;

3°. $\varphi(r) \to \infty$ *cu* $r \to \infty$.

Atunci există o aplicație $J : X \to X^*$ care are următoarele proprietăți:

1°. *oricare ar fi $u \in X$,*

$$\langle Ju, u\rangle = \varphi(\|u\|); \tag{1.1.21}$$

2°. $$\|Ju\| = \varphi(\|u\|) \tag{1.1.22}$$

3°. *oricare ar fi $u, v \in X$, avem*

$$\langle Ju - Jv,\ u - v\rangle \geqslant 0. \tag{1.1.23}$$

Fie, în condițiile teoremei 1.1.5, $\varphi(r) = r$, $r \geqslant 0$. Este evident că sînt satisfăcute condițiile 1°, 2°, 3°, impuse funcției de normalizare în teorema 1.1.5.

Rezultă, în virtutea acestei teoreme, că există o aplicație $J : X \to X^*$ (aplicația de dualitate corespunzătoare funcției de normalizare identice pe $[0, \infty)$) astfel încît, pentru orice $u \in X$, avem

$$\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2, \tag{1.1.24}$$

$$\|Ju\| = \|u\|. \tag{1.1.25}$$

Fie H un spațiu hilbertian real. Evident, H este strict convex. Ținînd seama de (1.1.24) și (1.1.25) și considerînd în virtutea teoremei lui

Scanned with OKEN Scanner

Riesz pe H confundat cu dualul său, rezultă că aplicaţia de dualitate corespunzătoare funcţiei de normalizare identice este aplicaţia identică a lui H pe H.

Proprietatea (1.1.23) este una dintre cele mai importante proprietăţi ale aplicaţiei dualitate (corespunzătoare cazului în care X^* este strict convex). Ea exprimă faptul că aplicaţia de dualitate este o aplicaţie monotonă în sensul lui Minty-Browder de la X la X^* (a se vedea mai departe definiţia 3.1.1).

Alte proprietăţi ale acestei aplicaţii vor fi furnizate de teorema lui Beurling-Livingston (teorema (3.4.1 din cap. III). De remarcat că în obţinerea rezultatelor din acest paragraf nu au fost folosite toate proprietăţile impuse funcţiei de normalizare. Ele vor interveni însă atunci cînd se va demonstra teorema lui Beurling-Livingston.

§ 1.2. Cîteva noţiuni de calcul diferenţial în spaţii Banach [66 f]

1.2.1. Diferenţiala în sensul lui Gâteux a operatorilor neliniari

Fie X şi Y două spaţii Banach reflexive şi reale şi fie X^* respectiv Y^* dualele lor.

Vom nota cu $\mathcal{O}(X, Y)$ mulţimea operatorilor omogeni definiţi de la X la Y. Aşadar, $P \in \mathcal{O}(X, Y)$ înseamnă că P este un operator definit de la X la Y ($P : X \to Y$) care satisface

$$P(\alpha x) = \alpha P(x) \tag{1.2.1.1}$$

oricare ar fi $x \in X$ şi α real.

Vom nota cu $L(X, Y)$ mulţimea operatorilor liniari (fără a fi şi mărginiţi) definiţi de la X la Y. Aşadar, $P \in L(X, Y)$ înseamnă că P este un operator definit de la X la Y care satisface

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y) \tag{1.2.1.2}$$

oricare ar fi $x, y \in X$ şi α, β reali.

În sfîrşit, vom nota cu $\mathcal{L}(X, Y)$ mulţimea operatorilor liniari şi mărginiţi (deci continui) definiţi de la X la Y. Aşadar, $P \in \mathcal{L}(X, Y)$ înseamnă că P este un operator definit de la X la Y care satisface

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y) \tag{1.2.1.3}$$

oricare ar fi $x, y \in X$ şi α, β reali şi, în plus,

$$\|Px\| \leqslant \|P\| \, \|x\|. \tag{1.2.1.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 1.2.1.1. Fie P un operator (în general neliniar) definit de la X la Y: $P : X \to Y$.

a) Operatorul P se zice *diferențiabil în sens Gâteaux pe* X dacă există un operator

$$(VP) : X \to \mathcal{O}(X, Y) \tag{1.2.1.5}$$

astfel încît

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t} = (VP)(x) \cdot h, \tag{1.2.1.6}$$

oricare ar fi $x \in X$, $h \in X$.

b) Dacă există un operator

$$(DP) : X \to L(X, Y) \tag{1.2.1.7}$$

astfel încît

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t} = (DP)(x) \cdot h, \tag{1.2.1.8}$$

oricare ar fi $x \in X$, $h \in X$, se spune că P *este diferențiabil, cu diferențială în sens Gâteaux liniară pe* X.

c) În sfîrșit, dacă există

$$P' : X \to \mathcal{L}(X, Y) \tag{1.2.1.9}$$

astfel încît

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t} = P'(x) \cdot h, \tag{1.2.1.10}$$

oricare ar fi $x, h \in X$, *se spune că operatorul* P *este derivabil în sens Gâteaux pe* X.

Evident, egalitatea (1.2.1.6) trebuie înțeleasă în sensul că

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{P(x + th) - P(x)}{t} - (VP)(x) \cdot h \right\|_Y = 0. \tag{1.2.1.11}$$

Analog pentru (1.2.1.8) și (1.2.1.10).

În (1.2.1.6), $(VP)(x) \cdot h$ înseamnă valoarea operatorului $(VP)(x)$ în punctul h, așadar

$$(VP)(x) \cdot h = [(VP)(x)](h).$$

Să remarcăm următoarele: fie x un punct fixat, altfel arbitrar, din X. Să presupunem că în x există

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru orice $h \in X$, limită care depinde evident de h şi este deci reprezentabilă în fiecare punct x sub forma $(VP)(x)\cdot h$. Avem

$$(VP)(x)\cdot(\alpha h) = \lim_{t\to 0} \frac{P(x+t\alpha h) - P(x)}{t} = \alpha \lim_{t\to 0} \frac{P(x+t\alpha h) - P(x)}{t\alpha}.$$

Notînd $t\alpha = \lambda$, rezultă

$$(VP)(x)\cdot(\alpha h) = \alpha \lim_{\lambda\to 0} \frac{P(x+\lambda h) - P(x)}{\lambda} = \alpha[(VP)(x)\cdot h]$$

ceea ce justifică faptul că în definiţia 1.2.1.1 am presupus $(VP): X \to \to \mathcal{O}(X, Y)$.

Să remarcăm de asemenea că dacă P este liniar, atunci, oricare ar fi x, $h \in X$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{P(x+th) - P(x)}{t} = Ph$$

şi deci un operator liniar pe X este diferenţiabil cu diferenţială după Gâteaux liniară pe X şi avem

$$(DP)(x)\cdot h = Ph, \tag{1.2.1.12}$$

oricare ar fi $x \in X$, $h \in X$.

Analog, dacă P este liniar şi mărginit pe X, rezultă

$$P'(x) = P \tag{1.2.1.13}$$

oricare ar fi $x \in X$.

Relaţiile (1.2.1.12), (1.2.1.13) arată că diferenţiabilitatea după Gâteaux este o noţiune interesantă numai pentru cazul operatorilor neliniari.

Dacă în definiţia 1.2.1.1, x aparţine unei mulţimi oarecare $\omega \subset X$, se zice că P este diferenţiabil (respectiv diferenţiabil cu diferenţială după Gâteaux liniară, respectiv derivabil) pe mulţimea ω.

Să remarcăm, în sfîrşit, că dacă în definiţia 1.2.1.1, $Y \equiv R$ (dreapta numerică), atunci se obţin definiţiile corespunzătoare pentru funcţionale neliniare pe spaţii Banach.

Între altele, definiţia obţinută particularizînd punctul c) al definiţiei 1.2.1.1 va juca un rol important în cele ce urmează. Această definiţie este următoarea:

DEFINIŢIA 1.2.1.2. Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi $f: X \to R$. Funcţionala f se zice *derivabilă în sens Gâteaux pe X dacă există operatorul*

$$f': X \to X^* \tag{1.2.1.14}$$

astfel încît

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=f'(x)\cdot h \qquad (1.2.1.15)$$

oricare ar fi $x,\ h\in X$.

În cele ce urmează, un rol important va juca o formulă de tip Lagrange pentru funcționale diferențiabile pe mulțimi convexe.

TEOREMA 1.2.1.1. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și fie $\omega\subset X$ o mulțime convexă.*

Dacă f este o funcțională diferențiabilă în sens Gâteaux pe ω, atunci, oricare ar fi $x,\ x+h\in\omega$, are loc următoarea formulă de tip Lagrange:

$$f(x+h)-f(x)=(Vf)(x+\tau h)\cdot h,\quad 0<\tau<1. \qquad (1.2.1.16)$$

Demonstrație. Să observăm mai întîi că, deoarece ω este convexă, din faptul că $x,\ x+h\in\omega$ rezultă

$$\{t(x+h)+(1-t)\,x\,|\,t\in[0,1]\}=\{x+th\,|\,t\in[0,1]\}\subset\omega.$$

Așadar, $x+\tau h$ cu $0<\tau<1$ aparține lui ω. Acest lucru era important de remarcat pentru că, prin ipoteză, f este diferențiabilă numai pe ω iar în formula (1.2.1.16) apare diferențiala lui f în punctul $x+\tau h$, $0<\tau<1$.

Pentru demonstrația formulei (1.2.1.16), fie funcția numerică

$$t\xrightarrow{\varphi}\varphi(t)=f(x+th),\quad t\in[0,1]. \qquad (1.2.1.17)$$

În virtutea faptului că f este diferențiabilă după Gâteaux pe ω, rezultă că φ este derivabilă în orice punct $t\in(0,1)$ și că

$$\varphi'(t)=(Vf)(x+th)\cdot h,\ t\in(0,1). \qquad (1.2.1.18)$$

Într-adevăr, oricare ar fi $t\in(0,1)$, avem

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+th+(\Delta t)\,h)-f(x+th)}{\Delta t}=$$

$$=(Vf)(x+th)\cdot h.$$

Raționamentul anterior arată că există de asemenea derivata la dreapta a lui φ în $t=0$, respectiv derivata la stînga în $t=1$. Aplicînd formula lui Lagrange pentru φ, se obține:

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau),\quad 0<\tau<1. \qquad (1.2.1.19)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1.2.1.18) şi (1.2.1.19) rezultă

$$f(x+h)-f(x)=(Vf)(x+\tau h)\cdot h, \quad 0<\tau<1 \qquad (1.2.1.20)$$

adică tocmai (1.2.1.16).

Teorema care urmează are ca scop stabilirea unei formule de tip Lagrange pentru operatori definiţi de la un spaţiu Banach reflexiv şi real la alt spaţiu Banach reflexiv şi real, altul decît dreapta numerică. Sensul în care este înţeleasă o asemenea formulă va fi precizat ulterior.

După cum se ştie din analiza clasică, formula lui Lagrange se poate stabili pentru funcţii scalare, nu însă şi pentru funcţii vectoriale. Un lucru analog se întîmplă în spaţii Banach atunci cînd se încearcă să se stabilească o formulă de tip Lagrange pentru operatori definiţi de la un spaţiu Banach reflexiv şi real la alt spaţiu Banach cu aceleaşi proprietăţi dar care nu este dreapta numerică. De aceea formula de tip Lagrange pentru operatori va fi înţeleasă în sensul precizat de:

TEOREMA 1.2.1.2. *Fie X şi Y două spaţii Banach reflexive şi reale şi $P: X \to Y$, diferenţiabil după Gâteaux pe mulţimea convexă $\omega \subset X$. Atunci, oricare ar fi $x, x+h \in \omega$ şi $e \in Y^*$, are loc următoarea formulă de tip Lagrange:*

$$\langle P(x+h)-P(x), e\rangle = \langle (VP)(x+\tau h)\cdot h, e\rangle, \quad 0<\tau<1. \qquad (1.2.1.21)$$

Demonstraţie. Fie $e \in Y^*$ şi funcţionala f pe X definită prin

$$x \xrightarrow{f} f(x)=\langle P(x), e\rangle. \qquad (1.2.1.22)$$

În virtutea faptului că P este diferenţiabil în sens Gâteaux pe ω, rezultă că f este diferenţiabilă în sens Gâteaux pe ω şi că

$$(Vf)(x)\cdot h=\langle (VP)(x)\cdot h, e\rangle \quad x \in \omega, \ h \in X. \qquad (1.2.1.23)$$

Într-adevăr,

$$(Vf)(x)\cdot h=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\langle P(x+th), e\rangle-\langle P(x), e\rangle}{t}$$

$$=\left\langle \lim_{t\to 0}\frac{P(x+th)-P(x)}{t}, e\right\rangle=\langle (VP)(x)\cdot h, e\rangle.$$

Aplicînd teorema 1.2.1.1 funcţionalei (1.2.1.22), rezultă

$$f(x+h)-f(x)=\langle P(x+h)-P(x), e\rangle=(Vf)(x+\tau h)\cdot h$$

$$=\langle (VP)(x+\tau h)\cdot h, e\rangle, \qquad 0<\tau<1,$$

adică tocmai (1.2.1.21).

Scanned with OKEN Scanner

Este evident că în formula (1.2.1.21) τ depinde atît de x și h cît și de funcționala $e \in Y^*$ cu care a fost construită funcționala f dată de (1.2.1.22). De aceea, în formula (1.2.1.21), deși e este arbitrară în Y^*, nu se poate renunța la ea și de aceea formula lui Lagrange pentru operatori trebuie înțeleasă în sensul precizat de teorema 1.2.1.2, deci de formula (1.2.1.21). Este de remarcat totuși că, după cunoștința noastră, proprietățile dependenței lui τ din formula (1.2.1.21) de $e \in Y^*$ n-au fost studiate. O caracterizare a acestei dependențe ar putea lărgi cadrul în care poate fi înțeleasă (1.2.1.21).

1.2.2. Condiții de tip Lipschitz pentru operatori diferențiabili [66 f]

Vom începe prin a enunța următoarea lemă:

LEMA 1.2.2.1 [1]). *Fie X un spațiu Banach și f o funcțională liniară și mărginită pe X. Oricare ar fi $k > 1$, există $x_0 \in X$ cu $\|x_0\| = 1$, astfel încît*

$$|f(x_0)| \geqslant \frac{1}{k}\|f\|. \tag{1.2.2.1}$$

Demonstrație. Se știe că

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|.$$

Fie $0 < \varepsilon \leqslant \|f\|\left(1 - \frac{1}{k}\right)$, lucru posibil în virtutea presupunerii $k > 1$. Din definiția marginii superioare, rezultă existența unui $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$, astfel încît

$$|f(x_0)| \geqslant \|f\| - \varepsilon \geqslant \frac{1}{k}\|f\|.$$

LEMA 1.2.2.2. *Fie X și Y două spații Banach, x un punct fixat în X și funcționala ψ definită pe Y^* după cum urmează*

$$e \in Y^*, \quad e \xrightarrow{\psi} \psi(e) = \langle x, e\rangle = e(x). \tag{1.2.2.2}$$

Atunci ψ este o funcțională liniară pe Y^* cu

$$\|\psi\| = \|x\|. \tag{1.2.2.3}$$

Demonstrație. Este evident că această lemă caută să stabilească un rezultat analog celui pe care îl furnizează teorema lui Riesz pe spații hilbertiene.

---

[1]) Este evident că o lemă analoagă se poate enunța pentru un operator liniar și mărginit definit de la un spațiu Banach la alt spațiu Banach.

Într-adevăr, se ştie că în demonstraţia teoremei lui Riesz, după ce se demonstrează existenţa elementului h cu care orice funcţională liniară şi mărginită pe un spaţiu hilbertian se reprezintă sub forma

$$F(x) = \langle x, h\rangle, \tag{1.2.2.4}$$

atunci faptul că

$$\|F\| = \|h\| \tag{1.2.2.5}$$

decurge astfel:

a) din (1.2.2.4), utilizînd inegalitatea Cauchy-Schwarz, urmează:

$$|F(x)| \leqslant \|h\|\,\|x\| \tag{1.2.2.6}$$

şi deci

$$\|F\| \leqslant \|h\|; \tag{1.2.2.7}$$

b) pe de altă parte, egalitatea (1.2.2.4) fiind adevărată pentru orice x, scrisă pentru $x = h$, ea devine

$$F(h) = \langle h, h\rangle = \|h\|^2 = |F(h)| \leqslant \|F\|\,\|h\|. \tag{1.2.2.8}$$

Deci

$$\|h\| \leqslant \|F\|. \tag{1.2.2.9}$$

Din (1.2.2.7) şi (1.2.2.9) rezultă (1.2.2.5).

În condiţiile lemei 1.2.2.2, punctul a) de mai sus poate fi transpus automat.

Într-adevăr, din (1.2.2.2) rezultă liniaritatea lui ψ şi ţinînd seama că $e \in X^*$, rezultă

$$|\psi(e)| = |\langle x, e\rangle| \leqslant \|x\|\,\|e\|.$$

Aşadar ψ este mărginită şi

$$\|\psi\| \leqslant \|x\|. \tag{1.2.2.10}$$

Evident, punctul b) al raţionamentului făcut pentru teorema lui Riesz nu mai poate fi transpus.

Aici vom folosi ideea de dualitate. Conform raţionamentului făcut în § 1.1, alegînd funcţia de normalizare, funcţia identitate pe $[0, +\infty)$, am demonstrat existenţa elementului $e_0 \in X^*$ cu proprietatea

$$e_0(x) = \langle x, e_0\rangle = \|x\|^2, \quad \|e_0\| = \|x\|. \tag{1.2.2.11}$$

Din (1.2.2.2) rezultă

$$\psi(e_0) = \langle x, e_0\rangle = \|x\|^2 = |\psi(e_0)| \leqslant \|\psi\|\,\|e_0\| = \|\psi\|\,\|x\|$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$\|x\| \leqslant \|\psi\|. \tag{1.2.2.12}$$

Din (1.2.2.10) și (1.2.2.12) rezultă

$$\|\psi\| = \|x\|. \tag{1.2.2.13}$$

Lemele 1.2.2.1 și 1.2.2.2 ne vor permite să obținem condiții Lipschitz pentru operatorii diferențiabili după Gâteaux.

Fie, în condițiile în care am demonstrat formula Lagrange pentru operatori, x și $x + h$ fixați în ω.

Fie, pe de altă parte, funcționala ψ definită pe Y^* după cum urmează:

$$e \in Y^*, \quad e \overset{\psi}{\to} \psi(e) = \langle P(x+h) - P(x),\ e \rangle. \tag{1.2.2.14}$$

În conformitate cu lema 1.2.2.2,

$$\|\psi\| = \|P(x+h) - P(x)\|. \tag{1.2.2.15}$$

Pe de altă parte, în conformitate cu lema 1.2.2.1, pentru orice $k > 1$, există $e_1 \in Y^*$ cu $\|e_1\| = 1$, astfel ca

$$|\psi(e_1)| = |\langle P(x+h) - P(x),\ e_1 \rangle| \geqslant \frac{1}{k}\|\psi\|. \tag{1.2.2.16}$$

Din (1.2.2.15) și (1.2.2.16) rezultă

$$\begin{aligned} &\|P(x+h) - P(x)\| \leqslant k|\langle P(x+h) - P(x),\ e_1\rangle| = \\ &= k|\langle (VP)(x+\tau h)\cdot h,\ e_1\rangle| \leqslant k\,\|(VP)(x+\tau h)\cdot h\|, \quad 0 < \tau < 1 \end{aligned} \tag{1.2.2.17}$$

și cum k este arbitrar dar mai mare ca unitatea iar funcționala e_1 (care depinde de k) a dispărut din calcule datorită faptului că era de normă unitate (vezi inegalitățile (1.2.2.17)), alegînd $k_n = 1 + \frac{1}{n}$, din (1.2.2.17) rezultă

$$\|P(x+h) - P(x)\| \leqslant k_n\|(VP)(x+\tau h)\cdot h\|, \quad 0 < \tau < 1$$

iar prin trecere la limită cu $n \to \infty$, rezultă

$$\|P(x+h) - P(x)\| \leqslant \|VP(x+\tau h)\cdot h\|, \tag{1.2.2.18}$$

eventual cu $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, din cauza trecerii la limită.

Scanned with OKEN Scanner

Am obţinut aşadar

TEOREMA 1.2.2.1. *Dacă $P : X \to Y$ are diferenţială după Gâteaux pe mulţimea convexă $\omega \subset X$, atunci, oricare ar fi x, $x + h \in \omega$, este satisfăcută următoarea condiţie de tip Lipschitz*

$$\|P(x+h) - P(x)\| \leqslant \|(VP)(x+\tau h)\cdot h\|, \tag{1.2.2.19}$$

unde $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Dacă P posedă diferenţială după Gâteaux liniară pe ω, condiţia (1.2.2.19) se scrie

$$\|P(x+h) - P(x)\| \leqslant \|(DP)(x+\tau h)\cdot h\| \tag{1.2.2.20}$$

iar dacă P este derivabil după Gâteaux pe ω, (1.2.2.19) se scrie

$$\|P(x+h) - P(x)\| \leqslant \|P'(x+\tau h)\cdot h\| \leqslant \|P'(x+\tau h)\|\,\|h\|. \tag{1.2.2.21}$$

§1.3. Operatori potenţiali. Teoreme de potenţialitate

1.3.1. Asupra potenţialităţii operatorilor diferenţiabili [66 f]

Fie H un spaţiu hilbertian real, f o funcţională pe H derivabilă în sens Gâteaux pe $\omega \subset H$.

În conformitate cu definiţia (1.2.1.2), există $f' : \omega \to H^*$ astfel încît

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = f'(x)\cdot h \tag{1.3.1.1}$$

oricare ar fi $x \in \omega$, $h \in H$.

Cum însă, după teorema lui Riesz, dacă $\mathcal{F}$ este o funcţională liniară şi continuă pe H,

$$\mathcal{F}h = \langle y, h\rangle, \quad \|\mathcal{F}\| = \|y\|$$

oricare ar fi $h \in H$, rezultă existenţa unui element $y(x) \in H$ astfel încît

$$f'(x)\cdot h = \langle y(x), h\rangle \tag{1.3.1.2}$$

oricare ar fi $h \in H$ şi $x \in \omega$, avînd în plus, de asemenea, datorită teoremei lui Riesz,

$$\|f'(x)\| = \|y(x)\|. \tag{1.3.1.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera $H^* \equiv H$ după teorema lui Riesz și fie

$$P : \omega \to H\ (\equiv H^*)$$

operatorul care ataşează fiecărui $x \in \omega$ acel element $y\,(x) \in H\,(\equiv H^*)$ cu care, după teorema lui Riesz,

$$f'(x)\cdot h = \langle y\,(x), h\rangle = \langle Px, h\rangle, \quad x \in \omega,\ h \in H. \tag{1.3.1.4}$$

DEFINIȚIA 1.3.1.1. Operatorul $P : \to H^*\ (\equiv H)$ și satisfăcînd (1.3.1.4) se numeşte *gradientul funcţionalei f pe mulţimea ω.*

Aşadar,

$$(\text{grad f}) : \omega \to H^*, \quad \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = f'(x)\cdot h = \langle (\text{grad}\, f)\,(x), h\rangle \tag{1.3.1.5}$$

Raţionamentul făcut anterior pe spaţii hilbertiene reale sugerează următoarea definiţie :

DEFINIȚIA 1.3.1.2. Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi fie f o funcţională pe X. Fie X^* dualul lui X şi $\omega \subset X$.

Dacă există un operator $F : \omega \to X^*$ astfel încît

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \langle F(x), h\rangle, \quad h \in X, \tag{1.3.1.6}$$

atunci F se numeşte *gradientul în sens Gâteaux al funcţionalei f pe mulţimea ω.*

DEFINIȚIA 1.3.1.3. Operatorul $F : X \to X^*$ se zice *potenţial pe mulţimea $\omega \subset X$*, dacă există o funcţională f al cărei gradient în sens Gâteaux pe mulţimea ω să fie F :

$$(\text{grad}\, f)\,(x) = F(x), \quad x \in \omega. \tag{1.3.1.7}$$

Următoarea teoremă dă o condiţie necesară şi suficientă de potenţialitate pentru operatorii ce posedă diferenţială în sens Gâteaux liniară.

TEOREMA 1.3.1.1. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi fie X^* dualul său. Presupunem că :*

1°. operatorul $F : X \to X^*$ are diferenţială în sens Gâteaux liniară în orice punct al bulei deschise $B\,(x_0\,;\,r) = \{x \mid x \in X,\ \|x - x_0\| < r\}$;

2°. oricare ar fi h_1, h_2 fixaţi în X, funcţionala $\langle (DF)\,(x)\cdot h_1, h_2\rangle$ este continuă în orice hiperplan bidimensional ce trece prin x. În aceste condiţii, necesar şi suficient ca F să fie potenţial în bula $B\,(x_0\,;\,r)$ este ca

$$\langle (DF)(x)\cdot h_1, h_2\rangle = \langle (DF)\,(x)\cdot h_2, h_1\rangle, \quad \begin{matrix} x \in B(x_0\,;\,r) \\ h_1, h_2 \in X \end{matrix}. \tag{1.3.1.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Necesitatea. Fie că există o funcțională f pe X astfel ca

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\langle F(x),h\rangle,\quad x\in B(x_0;r),\ h\in X. \tag{1.3.1.9}$$

Fie $x\in B(x_0;r)$, h_1, $h_2\in X$ și numerele pozitive a, b astfel ca $x+uh_1+vh_2\in B(x_0;r)$ oricare ar fi u și v cu $0\leqslant u\leqslant a$, $0\leqslant v\leqslant b$, (lucru posibil în virtutea proprietății absorbante a bulei deschise). Fie funcționala Δ,

$$x\xrightarrow{\Delta}\Delta(x)=f(x+ah_1+bh_2)-f(x+ah_1)-f(x+bh_2)+f(x),$$

$$x\in B(x_0;r) \tag{1.3.1.10}$$

și, de asemenea, funcționala φ,

$$x\xrightarrow{\varphi}\varphi(x)=f(x+ah_1)-f(x),\qquad x\in B(x_0;r). \tag{1.3.1.11}$$

În virtutea presupunerii că f este derivabilă în sens Gâteaux în bula $B(x_0;r)$, rezultă că φ este derivabilă în aceeași bulă și avem

$$\varphi'(x)\cdot h=f'(x+ah_1)\cdot h-f'(x)\cdot h,\qquad x\in B(x_0;r),\ h\in X. \tag{1.3.1.12}$$

De remarcat că în scrierea acestei formule, faptul că $x+ah_1\in B(x_0;r)$ este esențial pentru că prin ipoteză, funcționala f este presupusă derivabilă numai în $B(x_0;r)$.

Ținînd seama de relația (1.3.1.9) din (1.3.1.12) se obține

$$\varphi'(x)\cdot h=\langle F(x+ah_1)-F(x),h\rangle. \tag{1.3.1.13}$$

Vom dovedi acum că în (1.3.1.13) sînt satisfăcute condițiile în care am dat o formulă de tip Lagrange pentru operatori (vezi teorema 1.2.1.2).

Într-adevăr, F este presupus diferențiabil în $B(x_0,r)$, punctele $x+ah_1$, $x\in B(x_0;r)$, h este arbitrar în X care este presupus reflexiv, deci h se poate identifica cu elementul din bidualul lui X ce-i corespunde în virtutea acestei presupuneri. În sfîrșit, bula deschisă $B(x_0;r)$ este convexă căci oricare ar fi x_1, x_2, satisfăcînd $\|x_1-x_0\|<r$, $\|x_2-x_0\|<r$ și $t\in[0,1]$ avem

$$\|tx_2+(1-t)x_1-x_0\|=\|t(x_2-x_0)+(1-t)(x_1-x_0)\|\leqslant$$

$$\leqslant t\|x_2-x_0\|+(1-t)\|x_1-x_0\|<r.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, ţinînd seama de (1.2.1.21), din (1.3.1.12) rezultă

$$\varphi'(x)\cdot h = \langle (DF)(x + \tau_1 a h_1)\cdot a h_1, h\rangle =$$

$$= a\langle (DF)(x + \tau_1 a h_1)\cdot h_1, h\rangle, \qquad 0 < \tau_1 < 1. \tag{1.3.1.14}$$

Pe de altă parte, este evident că

$$\Delta(x) = \varphi(x + b h_2) - \varphi(x).$$

Aplicînd formula (1.2.1.16) furnizată de teorema 1.2.1.1, avem

$$\Delta(x) = \varphi'(x + \tau_2 b h_2)\cdot b h_2 = b\varphi'(x + \tau_2 b h_2)\cdot h_2, \quad x \in B(x_0, r),\ 0 < \tau_2 < 1. \tag{1.3.1.15}$$

Din (1.3.1.14) şi (1.3.1.15) rezultă imediat

$$\Delta(x) = ab\langle (DF)(x + \tau_1 a h_1 + \tau_2 b h_2)\cdot h_1, h_2\rangle \quad x \in B(x_0, r),$$

$$0 < \tau_1 < 1, \quad 0 < \tau_2 < 1. \tag{1.3.1.16}$$

Cu un raţionament analog făcut pentru funcţionala

$$\psi(x) = f(x + b h_2) - f(x)$$

se obţine

$$\Delta(x) = ab\langle (DF)(x + \tau_1' a h_1 + \tau_2' b h_2)\cdot h_2, h_1\rangle \quad x \in B(x_0, r),$$

$$0 < \tau_1' < 1, \quad 0 < \tau_2' < 1. \tag{1.3.1.17}$$

Din (1.3.1.16) şi (1.3.1.17) rezultă imediat

$$\langle (DF)(x + \tau_1 a h_1 + \tau_2 b h_2)\cdot h_1, h_2\rangle =$$

$$= \langle (DF)(x + \tau_1' a h_1 + \tau_2' b h_2)\cdot h_2 h_1\rangle. \tag{1.3.1.18}$$

Trecînd la limită cu $a \to 0$, $b \to 0$, şi ţinînd seama de ipoteza 2° din enunţul teoremei, se obţine

$$\langle (DF)(x)\cdot h_1, h_2\rangle = \langle (DF)(x)\cdot h_2, h_1\rangle.$$

Suficienţa. Vom dovedi că este suficient să presupunem că este adevărată (1.3.1.8), pentru ca, în ipotezele teoremei 1.3.1.1, să existe o funcţională f care să satisfacă la (1.3.1.7).

Scanned with OKEN Scanner

Vom indica această funcţională :

$$x \xrightarrow{f} f(x) = f_0 + \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0\rangle \, dt;\ f_0 =$$

$$= f(x_0), \quad x \in B(x_0; r). \tag{1.3.1.19}$$

Odată scrisă formula (1.3.1.19), să explicăm două lucruri : întîi că formula (1.3.1.19) are sens, apoi, de unde vine ideea de a indica funcţionala (1.3.1.19). Vom verifica apoi prin calcul direct că funcţionala (1.3.1.19) satisface (1.3.1.7).

Formula (1.3.1.19) are sens în virtutea următoarei leme :

LEMA 1.3.1.1. *Dacă operatorul $F : X \to X^*$ este diferenţiabil în punctul x_0, atunci F este continuu în x_0 după orice direcţie, adică*

$$\lim_{t \to 0} \|F(x_0 + th) - F(x_0)\| = 0, \quad h \in X. \tag{1.3.1.20}$$

Demonstraţie. Din faptul că

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t} [F(x_0 + th) - F(x_0)] - (VF)(x_0) \cdot h \right\| = 0$$

rezultă că

$$\frac{1}{t} [F(x_0 + th) - F(x_0)] = (VF)(x_0) \cdot h + \alpha$$

cu $\|\alpha\| \to 0$ cînd $t \to 0$.

Deci

$$\|F(x_0 + th) - F(x_0)\| \leqslant |t| \, (\|(VF)(x_0) \cdot h\| + \|\alpha\|)$$

de unde, prin trecere la limită cu $t \to 0$, rezultă (1.3.1.20). Utilizînd această lemă rezultă uşor că funcţia

$$t \to \langle F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0\rangle, \quad t \in [0,1] \tag{1.3.1.21}$$

este continuă.

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} &|\langle F(x_0 + t(x - x_0)) - F(x_0 + t_0(x - x_0)),\ x - x_0\rangle| = \\ &= |\langle F(x_0 + t_0(x - x_0) + (t - t_0)(x - x_0)) - \\ &- F(x_0 + t_0(x - x_0)),\ x - x_0\rangle| \leqslant \\ &\leqslant \|F(x_0 + t_0(x - x_0) + (t - t_0)(x - x_0)) - \\ &- F(x_0 + t_0(x - x_0))\| \, \|x - x_0\| \end{aligned}$$

şi este suficient să aplicăm lema precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

Ideea de a indica funcționala (1.3.1.19) stă în următorul raționament. Fie că ar exista o funcțională f astfel ca oricare ar fi $x \in B(x_0; r)$ să avem (1.3.1.7).

Fie funcția

$$t \xrightarrow{\varphi} f(x_0 + t(x - x_0)), \quad t \in [0, 1].$$

Se dovedește ușor, prin calcul direct, că, în virtutea faptului că f este derivabilă în sens Gâteaux în $B(x_0; r)$, rezultă existența lui $\varphi'(t)$, și egalitatea

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = \langle F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0 \rangle,$$

de unde rezultă

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0 \rangle\, dt,$$

adică tocmai (1.3.1.19).

De aici, ideea de a propune funcționala f prin formula (1.3.1.19) și de a verifica prin calcul direct că ea satisface la (1.3.1.7).

Într-adevăr, avem:

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0) + th) - F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0 \rangle\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0) + th),\ h \rangle\, dt.$$

Dar

$$\int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0) + th) - F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0 \rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^t \frac{d}{ds} \langle F(x_0 + t(x - x_0) + sh),\ (x - x_0) \rangle\, ds =$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^t \langle (DF)(x_0 + t(x - x_0) + sh) \cdot h,\ x - x_0 \rangle\, ds =$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^t \langle (DF)(x_0 + t(x - x_0) + sh) \cdot (x - x_0),\ h \rangle\, ds =$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^t \frac{d}{dt} \langle F(x_0 + t(x - x_0) + sh),\ h \rangle\, ds =$$

$$= \int_0^1 ds \int_s^1 \frac{d}{dt} \langle F(x_0 + t(x - x_0) + sh),\ h \rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle F(x + sh) - F(x_0 + sh + s(x - x_0)),\ h \rangle\, ds$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că, în definitiv,

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1 \langle F(x+sh),\ h\rangle\, ds.$$

Ţinînd seama de lema 1.3.1.1, de aici rezultă

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\langle F(x),\ h\rangle,$$

şi cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Teorema 1.3.1.1 are următoarea consecinţă evidentă:

În condiţiile teoremei 1.3.1.1, există o singură funcţională care să ia în x_0 o valoarea prescrisă f_0 şi al cărei gradient în bula deschisă $B(x_0; r)$ să fie operatorul F. Această funcţională este f, definită astfel:

$$x \xrightarrow{f} f(x)=f_0+\int_0^1 \langle F(x_0+t(x-x_0)),\ x-x_0\rangle\, dt,\quad x\in B(x_0; r). \tag{1.3.1.22}$$

Asupra potenţialităţii produsului de operatori

Analiza demonstraţiei teoremei 1.3.1.1 arată că dacă condiţiile acestei teoreme sînt îndeplinite pe tot spaţiul, atunci ea furnizează o condiţie necesară şi suficientă de potenţialitate pe X a operatorului $F: X\to X^*$.

TEOREMA 1.3.1.2. *Fie H un spaţiu hilbertian real, $F: H\to H$ şi A un operator liniar şi mărginit de la H în H. Presupunem că:*

1° $(DF)(x)\cdot h$ există în orice punct din H, liniară cu h;

2° $(DF)(x)\cdot h$ este continuă cu x în orice hiperplan bidimensional ce trece prin x.

În aceste condiţii, operatorul (AF) satisface condiţiile teoremei 1.3.1.1.

Demonstraţie. Într-adevăr, avem

$$[D(AF)](x)\cdot h=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(AF)(x+th)-(AF)(x)}{t}=A\left[\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t}\right]=$$

$$=A\,[(DF)(x)\cdot h] \tag{1.3.1.23}$$

În ceea ce priveşte condiţia 2° a teoremei 1.3.1.1, formulată de data aceasta pentru orice $x\in H$, ea este îndeplinită dacă ţinem seama că în (1.3.1.23), A este continuu şi, de asemenea, dacă ţinem seama de condiţia 2° din teorema 1.3.1.2.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremele 1.3.1.1 și 1.3.1.2 permit să enunțăm:

TEOREMA 1.3.1.3. *Fie H un spațiu hilbertian real, $F : H \to H$ și A un operator liniar și mărginit de la H în H. Presupunem că:*

1° *$(DF)(x)\cdot h$ există în orice punct din H liniară cu h;*

2° *$(DF)(x)\cdot h$ este continuă cu x în orice hiperplan bidimensional ce trece prin x.*

Atunci, o condiție necesară și suficientă pentru ca operatorul (AF) să fie potențial pe H este ca oricare ar fi $x, h_1, h_2 \in H$, să avem

$$\langle A\,[(DF)(x)\cdot h_1],\ h_2\rangle = \langle A\,[(DF)(x)\cdot h_2],\ h_1\rangle. \qquad (1.3.1.24)$$

Este ușor de văzut că, deoarece

$$\langle A\,[(DF)(x)\cdot h_2], h_1\rangle = \langle (DF)(x)\cdot h_2,\ A^*\,h_1\rangle,$$

condiția (1.3.1.24) poate fi scrisă sub forma

$$\langle A\,[(DF)(x)\cdot h_1],\ h_2\rangle = \langle (DF)(x)\cdot h_2,\ A^*\,h_1\rangle. \qquad (1.3.1.25)$$

Dacă se presupune că în afară de condițiile impuse lui F de teorema 1.3.1.3, acesta satisface și egalitatea

$$\langle (DF)(x)\cdot h_1, h_2\rangle = \langle (DF)(x)\cdot h_2,\ h_1\rangle \qquad (1.3.1.26)$$

oricare ar fi x, h_1, $h_2 \in H$, atunci după teorema 1.3.1.1, F este potențial pe H și teorema 1.3.1.3 furnizează o condiție necesară și suficientă pentru ca produsul dintre un operator liniar și mărginit pe H și un operator a cărui potențialitate pe H este asigurată de teorema 1.3.1.1, să fie potențial.

Dar, dacă F satisface și (1.3.1.26), din (1.3.1.26) și (1.3.1.25) rezultă

$$\langle A\,[(DF)(x)\cdot h_1],\ h_2\rangle = \langle (DF)(x)\cdot (A^* h_1),\ h_2\rangle$$

și cum h_1, h_2 sînt arbitrari în H, aceasta revine la

$$A\,[(DF)(x)\cdot h] = (DF)(x)\cdot (A^* h) \qquad (1.3.1.27)$$

oricare ar fi x și h în H.

Caz particular important. Fie $F = I$ (operatorul identitate pe H). Deoarece oricare ar fi x și h din H avem

$$(DF)(x)\cdot h = (DI)(x)\cdot h = Ih = h, \qquad (1.3.1.28)$$

este evident că I satisface condițiile impuse lui F de teorema 1.3.1.3 precum și condiția (1.3.1.26).

Scanned with OKEN Scanner

Din teorema 1.3.1.3 se trage acum imediat

TEOREMA 1.3.1.4. *O condiție necesară și suficientă pentru ca un operator liniar și mărginit A definit de la un spațiu hilbertian real H în H să fie potențial pe H este ca*

$$A = A^*.$$

Demonstrație. Rezultă ținînd seama de (1.3.1.28), fie în (1.3.1.27), fie în (1.3.1.25).

Vom încheia considerațiile privind condițiile necesare și suficiente de potențialitate pentru operatorii diferențiabili cu o teoremă care furnizează o condiție suficientă pentru ca o funcțională ce posedă gradient în sens Gâteaux pe o mulțime convexă, să satisfacă pe acea mulțime o condiție Lipschitz.

TEOREMA 1.3.1.4. *Fie că funcționala f posedă gradient în sens Gâteaux pe o mulțime convexă ω dintr-un spațiu Banach reflexiv și real. Dacă*

$$M = \sup_{x \in \omega} \| (\operatorname{grad} f)(x) \| < +\infty, \tag{1.3.1.29}$$

atunci funcționala f satisface pe ω o condiție Lipschitz.

Demonstrație. Fie x_1 și x_2 două puncte arbitrare din ω. Aplicînd formula lui Lagrange, avem

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \tau(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1) =$$

$$= \langle (\operatorname{grad} f)(x_1 + \tau(x_2 - x_1)),\ x_2 - x_1 \rangle,$$

de unde, ținînd seama de (1.3.1.29), rezultă

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \| (\operatorname{grad} f)(x_1 + \tau(x_2 - x_1)) \| \, \| x_2 - x_1 \| \leqslant M \| x_2 - x_1 \|.$$

1.3.2. Asupra potențialității operatorilor nediferențiabili. Teorema lui Govurin [66f], [32]

Rezultatul esențial al acestui paragraf îl constituie teorema lui Govurin de potențialitate pentru operatorii ce nu sînt diferențiabili în sens Gâteaux. Stabilirea acestei teoreme necesită cunoașterea unor rezultate de teoria integrării pentru funcții definite de la un interval închis al dreptei reale la un spațiu Banach. Astăzi, aceste rezultate sînt în cea mai mare parte rezultate clasice. De aceea ne vom mărgini să le enunțăm, fără demonstrații. Lemele specifice necesare teoremei lui Govurin vor fi demonstrate.

Scanned with OKEN Scanner

1.3.2.1. *Funcții cu variație mărginită.* Fie $[a, b]$ un interval închis al dreptei reale, X un spațiu Banach reflexiv și real și $x : [a, b] \to X$. Fie

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$.

DEFINIȚIA 1.3.2.1.1. Se numește *variație a funcției x pe intervalul* $[a, b]$ relativă la diviziunea Δ și se notează $\bigvee_a^b (x; \Delta)$, următoarea sumă :

$$\bigvee_a^b (x; \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|.$$

DEFINIȚIA 1.3.2.1.2. Se numește *variație totală a funcției x pe intervalul* $[a, b]$ și se notează $\bigvee_a^b (x)$,

$$\bigvee_a^b (x) = \sup_{\Delta} \bigvee_a^b (x; \Delta)$$

DEFINIȚIA 1.3.2.1.3. Funcția x se zice *cu variație mărginită pe* $[a, b]$ dacă $\bigvee_a^b (x) < \infty$.

Exemplu. TEOREMA 1.3.2.1.1. *Fie că x este lipschitziană pe $[a, b]$, deci că există $M > 0$ astfel că, oricare ar fi $t', t'' \in [a, b]$, avem*

$$\|x(t') - x(t'')\| \leqslant M|t' - t''|.$$

Fie

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

o diviziune arbitrară a lui $[a, b]$.

Avem

$$\bigvee_a^b (x; \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k| = M(b - a)$$

de unde rezultă

$$\bigvee_a^b (x) \leqslant M(b - a),$$

deci x este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1.3.2.1.2. *Dacă funcția* $x : [a, b] \to X$ *are derivată*

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

mărginită pe (a, b), *atunci* x *satisface pe* $[a, b]$ *o condiție Lipschitz.*

Demonstrație. Fie t_1, t_2 două puncte arbitrare din $[a,b]$ și funcționala f_{t_1, t_2} definită pe X^* după cum urmează

$$e \in X^*, \; e \xrightarrow{f_{t_1, t_2}} f_{t_1, t_2}(e) = \langle x(t_2) - x(t_1), e \rangle.$$

În conformitate cu lema 1.2.2.2, există $e_{t_1, t_2} \in X^*$ cu $\| e_{t_1, t_2} \| = 1$ astfel ca

$$|f_{t_1, t_2}(e_{t_1, t_2})| = |\langle x(t_2) - x(t_1), \; e_{t_1, t_2} \rangle| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \| f_{t_1, t_2} \| = \frac{1}{2} \| x(t_2) - x(t_1) \|. \qquad (1.3.2.1.1)$$

Fie funcția reală φ definită pe $[a, b]$ după cum urmează

$$t \in [a, b], \; t \xrightarrow{\varphi} \varphi(t) = \langle x(t), \; e_{t_1, t_2} \rangle.$$

Prin calcul direct, ținînd seama de ipoteză, se deduce că φ este derivabilă pe (a, b) și

$$\varphi'(t) = \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)(t), \; e_{t_1, t_2} \right\rangle, \quad t \in (a, b).$$

Aplicînd funcției φ formula lui Lagrange, se obține

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)(t_0), \; e_{t_1, t_2} \right\rangle (t_2 - t_1), \quad t_1 < t_0 < t_2,$$

de unde, ținînd seama că x are derivată mărginită pe (a, b), rezultă

$$|\langle x(t_2) - x(t_1), e_{t_1, t_2} \rangle| = |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| =$$

$$= \left| \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)(t_0), \; e_{t_1, t_2} \right\rangle (t_2 - t_1) \right| \leqslant M |t_2 - t_1|. \qquad (1.3.2.1.2)$$

Din (1.3.2.1.1) și (1.3.2.1.2) rezultă

$$\| x(t_2) - x(t_1) \| \leqslant 2M |t_2 - t_1|$$

ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1.3.2.1.3. *Fie* $x : [a, b] \to X$. *Dacă* x *are derivată mărginită pe* (a, b), *atunci* x *este cu variație mărginită pe* $[a, b]$.

Demonstrație. Rezultă din teoremele 1.3.2.1.1 și 1.3.2.1.2.

1.3.2.2. *Drumuri și curbe în spații Banach.* Conținutul acestui subparagraf a rezultat dintr-o adaptare imediată la spații Banach a unor raționamente din cartea lui Miron Nicolescu, N. Dinculeanu și S. Marcus [52]. Noțiunile și rezultatele acestui subparagraf sînt absolut necesare pentru obținerea teoremei lui Govurin.

Fie X un spațiu Banach reflexiv și real, $[a, b]$ un compact al dreptei numerice și

$$x : [a, b] \to X$$

o aplicație continuă a lui $[a, b]$ în X.

Fie

$$I[x] = \{x(t)/t \in [a, b]\}.$$

DEFINIȚIA 1.3.2.2.1. Cuplul $(x, I[x])$ constituie un *drum în* X și se notează

$$d \equiv (x, I[x]).$$

Prin definiție, $I[x]$ *este imaginea în* X *a drumului* d, iar x *este o reprezentare a lui* d.

(Se va vedea ulterior de ce spunem o reprezentare și nu reprezentarea drumului d).

Fie x o reprezentare a drumului d. Fie că există $t', t'' \in [a, b]$, $t' \neq t''$, astfel ca $x(t') = x(t'')$. Se spune atunci că $x(t')$ este un punct multiplu al drumului d.

Dacă un drum d nu are nici un punct multiplu, se zice că este un drum simplu.

Drumuri rectificabile după Jordan. Fie

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

o diviziune arbitrară a lui $[a, b]$ și

$$l_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \| x(t_{k+1}) - x(t_k) \| = \bigvee_a^b (x ; \Delta).$$

Se observă că trecînd de la diviziunea Δ la o diviziune mai fină, l_Δ nu descrește, de unde ideea naturală de a considera marginea superioară după Δ a mulțimii $\{l_\Delta\}$.

DEFINIȚIA 1.3.2.2.2. Drumul d se numește *rectificabil* dacă mulțimea $\{l_\Delta\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulțimi se numește lungimea drumului.

Este evident că : un drum $(x, I[x])$ este rectificabil dacă şi numai dacă x este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Reprezentări parametrice echivalente. Fie $[a, b]$ şi $[\alpha, \beta]$ două compacte ale dreptei numerice. Se ştie că orice homeomorfism al lui $[a, b]$ pe $[\alpha, \beta]$ este o aplicaţie strict monotonă.

Sînt evidente următoarele afirmaţii :

a) dacă $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ este un homeomorfism al lui $[a, b]$ pe $[\alpha, \beta]$, atunci $h^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ este un homeomorfism al lui $[\alpha, \beta]$ pe $[a, b]$;

b) dacă $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ şi $h' : [\alpha, \beta] \to [\alpha', \beta']$ sînt homeomorfisme, atunci

$$h' \circ h : [a, b] \to [\alpha', \beta']$$

este de asemenea un homeomorfism.

Cum orice homeomorfism între două intervale compacte ale dreptei numerice este o aplicaţie strict monotonă, vom împărţi homeomorfismele de la $[a, b]$ la $[\alpha, \beta]$ în două clase :

1) homeomorfisme directe — realizate cu aplicaţii continue strict crescătoare şi

2) homeomorfisme inverse — realizate cu aplicaţii continue strict descrescătoare.

Este evident că : dacă

$$f : [a, b] \to [\alpha, \beta]; \quad g : [\alpha, \beta] \to [\alpha', \beta']$$

sînt două homeomorfisme, homeomorfismul

$$g \circ f : [a, b] \to [\alpha', \beta']$$

este direct sau invers după cum f şi g aparţin aceleiaşi clase sau nu.

Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi $[a, b]$ un interval compact al dreptei numerice. Vom nota cu $\mathcal{C}[a, b]$ mulţimea aplicaţiilor continue ale lui $[a, b]$ în X :

$$\mathcal{C}[a, b] = \{x / x : [a, b] \to X, \ x \text{ continuă}\}.$$

Fie $x \in \mathcal{C}[a, b]$ şi $x' \in \mathcal{C}[a', b']$. Prin definiţie,

$$x \sim x'$$

dacă există un homeomorfism direct

$$h : [a, b] \to [a', b']$$

astfel ca

$$x(t) = x'(\tau)$$

oricare ar fi $\tau \in [a', b']$, $\tau = h(t)$.

Se poate dovedi ușor că relația „$\sim$" este o relație de echivalență. Cum se știe, această relație împarte mulțimea

$$\{\mathcal{C}[a, b]\}$$

a tuturor funcțiilor continue definite pe mulțimea intervalelor compacte ale dreptei numerice și cu valori în X, în clase disjuncte. Corespunzător, mulțimea drumurilor se împarte în clase disjuncte.

DEFINIȚIA 1.3.2.2.3. Două drumuri $(x, I[x])$ și $(x', I[x'])$ se zic *echivalente*, dacă și numai dacă $x \sim x'$.

Din definiția relației „$\sim$" rezultă imediat că două drumuri echivalente au aceeași imagine în X.

DEFINIȚIA 1.3.2.2.4. Se numește *curbă în* X o clasă de drumuri echivalente.

Noțiunea de curbă rectificabilă după Jordan se introduce în mod natural ca urmare a următoarei propoziții:

Un drum echivalent cu un drum rectificabil este de asemenea rectificabil și de aceeași lungime.

Fie, într-adevăr,

$$d \equiv (x, I[x]) \qquad x : [a, b] \to X$$

și

$$d' \equiv (x', I[x']) \quad x' : [\alpha, \beta] \to X$$

două drumuri echivalente și fie că drumul d este rectificabil. Orice diviziune a lui $[\alpha, \beta]$

$$\Delta' : \alpha = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \beta$$

este imaginea prin h a unei diviziuni

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

a lui $[a, b]$, avînd $\tau_i = h(t_i)$, unde h este homeomorfismul direct al lui $[a, b]$ pe $[\alpha, \beta]$, și reciproc. Așadar h stabilește o corespondență biunivocă între diviziunile lui $[a, b]$ și $[\alpha, \beta]$. Cum $x \sim x'$, avem

$$x(t_i) = x'(\tau_i); \quad \tau_i = h(t_i).$$

Avem, de asemenea,

$$l_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \| x(t_{k+1}) - x(t_k) \| = \sum_{k=0}^{n-1} \| x'(\tau_{k+1}) - x'(\tau_k) \| = l_{\Delta'}$$

așadar, mulțimile $\{l_\Delta\}$ și $\{l_{\Delta'}\}$ coincid.

Scanned with OKEN Scanner

Cum prin ipoteză mulțimea $\{l_\Delta\}$ are o margine superioară, mulțimea $\{l_{\Delta'}\}$ are de asemenea o margine superioară iar din coincidența mulțimilor $\{l_\Delta\}$ și $\{l_{\Delta'}\}$ rezultă coincidența marginilor lor superioare.

Această propoziție justifică

DEFINIȚIA 1.3.2.2.5. O curbă ce conține un drum rectificabil se zice *rectificabilă*. Lungimea unei curbe rectificabile este prin definiție lungimea unui drum al său.

1.3.2.3. *Integrala Stieltjes*. Fie X, Y, Z trei spații Banach reflexive și reale. Fie că pentru orice $x \in X$ și $y \in Y$ este definită operația de înmulțire la dreapta a lui x cu y. Rezultatul înmulțirii la dreapta a lui x cu y va fi notat $x \cdot y$.

Fie că înmulțirea la dreapta a oricărui $x \in X$ cu $y \in Y$ are următoarele proprietăți:

1° $x \cdot y \in Z$, oricare ar fi $x \in X$, $y \in Y$;

2° $(ax_1 + bx_2) \cdot y = a(x_1 \cdot y) + b(x_2 \cdot y)$ oricare ar fi $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$, $a, b \in R$;

3° $x \cdot (ay_1 + by_2) = a(x \cdot y_1) + b(x \cdot y_2)$ oricare ar fi $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, $a, b \in R$;

4° $\|x \cdot y\|_Z \leqslant \|x\|_X \, \|y\|_Y$ oricare ar fi $x \in X, y \in Y$. (A)

Fie $\Phi : X \times Y \to Z$ după cum urmează:

$$(x, y) \xrightarrow{\Phi} \Phi(x, y) = x \cdot y.$$

Este evident că în virtutea proprietăților 1° — 4°, Φ este un operator biliniar de normă

$$\|\Phi\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \|\Phi(x, y)\| \leqslant 1.$$

Reciproc, dacă există un operator Φ definit de la $X \times Y$ la Z, biliniar și de normă mai mică sau egală cu unitatea, se poate defini înmulțirea la dreapta a oricărui $x \in X$ cu orice $y \in Y$, punînd prin definiție

$$x \cdot y = \Phi(x, y).$$

Evident, proprietățile 1° — 4° sînt satisfăcute.

Fie

$$x : [a, b] \to X, \; y : [a, b] \to Y.$$

Conform celor de mai sus, pentru orice $t \in [a, b]$, $x(t) \cdot y(t) \in Z$ și sînt satisfăcute proprietățile 1° — 4°.

Fie

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

o diviziune a lui $[a, b]$ și punctele $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Fie $\sigma_\Delta(x, y, \tau_k)$ suma Riemann-Stieltjes asociată funcțiilor x, y, diviziunii Δ și punctelor τ_k:

$$\sigma_\Delta(x, y, \tau_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\tau_k) \cdot (y(t_{k+1}) - y(t_k)).$$

DEFINIȚIA 1.3.2.3.1. Fie că există $I \in Z$ cu următoarea proprietate: fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, astfel încît pentru orice diviziune Δ cu

$$\nu(\Delta) = \max_k (t_{k+1} - t_k) < \eta$$

și pentru orice alegere a punctelor τ_k, $t_k \leqslant \tau_k \leqslant t_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ să avem

$$\| \sigma_\Delta(x, y, \tau_k) - I \|_Z < \varepsilon.$$

Spunem atunci că *x este integrabilă Stieltjes în raport cu y pe $[a, b]$* iar $I \in Z$ se numește *integrala Stieltjes a lui x în raport cu y pe $[a, b]$* și se notează

$$I = \int_a^b x(t)\, dy(t).$$

Următoarele teoreme reprezintă transpuneri ale rezultatelor bine cunoscute pentru funcții definite pe intervale compacte ale dreptei numerice și cu valori reale. Demonstrațiile lor detaliate se găsesc de exemplu în cartea lui Vainberg [66 f]. Le vom reproduce de aceea fără demonstrații, mărginindu-ne la a demonstra numai acele rezultate care au fost obținute în mod special în vederea demonstrării teoremei lui Govurin.

Teorema care urmează răspunde la întrebarea: în ce condiții există I care să răspundă la definiția 1.3.2.3.1.

TEOREMA 1.3.2.3.1. *Dacă $x : [a, b] \to X$ este continuă iar $y : [a, b] \to Y$ este cu variație mărginită, atunci există*

$$\int_a^b x(t)\, dy(t).$$

În baza definiției 1.3.2.3.1 se stabilesc imediat următoarele proprietăți ale integralei Stieltjes

1° $$\int_a^b x(t)\, dy(t) = -\int_b^a x(t)\, dy(t)$$

2° Dacă x este constantă pe $[a, b]$, $x(t) = c$, $t \in [a, b]$, $c \in X$, atunci

$$\int_a^b x(t)\, dy(t) = \int_a^b c\, dy(t) = c \cdot (y(b) - y(a)).$$

3° Dacă pentru orice $t \in [a, b]$

$$x(t) = c\varphi(t),$$

unde c este un element al lui X iar φ este definită pe $[a, b]$ și cu valori reale, din existența integralei

$$\int_a^b \varphi(t)\, dy(t),$$

urmează existența integralei

$$\int_a^b x(t)\, dy(t)$$

și egalitatea

$$\int_a^b x(t)\, dy(t) = c \cdot \int_a^b \varphi(t)\, dy(t).$$

4° Dacă pentru orice $t \in [a, b]$

$$y(t) = c\psi(t),$$

unde c este un element al lui Y iar ψ este definită pe $[a, b]$ și cu valori reale, atunci, din existența integralei

$$\int_a^b x(t)\, d\psi(t),$$

rezultă existența integralei

$$\int_a^b x(t)\, dy(t)$$

și egalitatea

$$\int_a^b x(t)\, dy(t) = \left(\int_a^b x(t)\, d\psi(t)\right) \cdot c$$

5° Din existența oricăror două integrale din formulele ce urmează, decurge existența celei de a treia și egalitățile

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\, dy(t) = \int_a^b x_1(t)\, dy(t) + \int_a^b x_2(t)\, dy(t),$$

$$\int_a^b x(t)\, d[y_1(t) + y_2(t)] = \int_a^b x(t)\, dy_1(t) + \int_a^b x(t)\, dy_2(t).$$

6° Din existența oricăreia dintre integralele

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t), \qquad \int_a^b [\mathrm{d}x(t)]\,y(t),$$

urmează existența celeilalte și egalitatea

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t) + \int_a^b [\mathrm{d}x(t)]\,y(t) = x(b)\cdot y(b) - x(a)\cdot y(a).$$

7° Dacă $a < c < b$, atunci

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t) = \int_a^c x(t)\,\mathrm{d}y(t) + \int_c^b x(t)\,\mathrm{d}y(t)$$

cu condiția ca integrala care este în partea stîngă a acestei egalități să existe.

8° Fie că există

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t)$$

și fie h un homeomorfism direct al lui $[a, b]$ pe $[\alpha, \beta]$ (h continuă și strict crescătoare, $h(a) = \alpha$, $h(b) = \beta$).

Fie

$$x' : [\alpha, \beta] \to X, \qquad y' : [\alpha, \beta] \to Y$$

după cum urmează: oricare ar fi $\tau \in [\alpha, \beta]$, există $t \in [a, b]$, t unic, astfel ca $h(t) = \tau$. Punem, prin definiție,

$$\left.\begin{aligned} x'(\tau) &= x(t) \\ y'(\tau) &= y(t) \end{aligned}\right\}; \qquad h(t) = \tau.$$

Atunci există

$$\int_\alpha^\beta x'(\tau)\,\mathrm{d}y'(\tau)$$

și avem

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t) = \int_\alpha^\beta x'(\tau)\,\mathrm{d}y'(\tau).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația este imediată. Ea utilizează aceeași idee după care am demonstrat că un drum echivalent cu un drum rectificabil este de asemenea rectificabil și de aceeași lungime cu primul: h stabilește o corespondență biunivocă între mulțimea diviziunilor lui $[a, b]$ și $[\alpha, \beta]$. Se ține seama de asemenea de definiția celor două funcții x' și y'.

TEOREMA 1.3.2.3.2. [66 f] [1]). *Dacă* $x : [a, b] \to X$ *este continuă iar* $y : [a, b] \to Y$ *este cu variație mărginită, atunci*

$$\left\| \int_a^b x(t)\, \mathrm{d}y(t) \right\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\|\, \mathrm{d} \bigvee_a^t (y) \leqslant \max_{t \in [a,\, b]} \|x(t)\| \bigvee_a^b (y). \qquad (1.3.2.3.1)$$

Demonstrație. Să observăm mai întîi că

$$\int_a^b x(t)\, \mathrm{d}y(t)$$

există în conformitate cu teorema 1.3.2.3.1. În ceea ce privește $\int_a^b \|x(t)\|\, \mathrm{d} \bigvee_a^t (y)$, ea există în conformitate cu următoarele propoziții:

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* $y : [a, b] \to Y$ *este cu variație mărginită pe* $[a, b]$ *și* $[c, d] \subset [a, b]$, *atunci* y *este cu variație mărginită pe* $[c,d]$ *și*

$$\bigvee_c^d (y) \leqslant \bigvee_a^b (y).$$

Demonstrație. Fie

$$\Delta' : c = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} = d$$

o diviziune arbitrară a lui $[c, d]$ și

$$\Delta : a = t_0 \leqslant t_1 = c < t_2 \ldots < t_{n-1} = d \leqslant t_n = b.$$

Avem

$$\bigvee_c^d (y\,;\, \Delta') = \sum_{k=1}^{n-2} \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\| = \bigvee_a^b (y\,;\, \Delta) \leqslant \bigvee_a^b (y),$$

de unde,

$$\bigvee_c^d (y) \leqslant \bigvee_a^b (y).$$

[1]) Această teoremă va juca un rol important în demonstrarea teoremei lui Govurin de aceea, pentru ea vom da demonstrația în detaliu.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă* $y : [a, b] \to Y$ *este cu variație mărginită pe* $[a, b]$, *atunci funcția* $t \to \bigvee_a^t (y)$, $t \in [a, b]$ *este crescătoare pe* $[a, b]$.

Demonstrație. Este o consecință imediată a propoziției anterioare.

PROPOZIȚIA 3. *O funcție reală, monotonă pe* $[a, b]$ *este cu variație mărginită pe* $[a, b]$ *și* $\bigvee_a^b (f) = |f(b) - f(a)|$.

Din propoziția 2 și propoziția 3 rezultă

PROPOZIȚIA 4. *Dacă* $y : [a, b] \to Y$ *este cu variație mărginită pe* $[a, b]$, *atunci funcția reală* φ,

$$t \xrightarrow{\varphi} \bigvee_a^t (y), \quad t \in [a, b]$$

este cu variație mărginită pe $[a, b]$ *și*

$$\bigvee_a^b (\varphi) = \varphi(b) - \varphi(a) = \bigvee_a^b (y) - \bigvee_a^a (y) = \bigvee_a^b (y).$$

Să mai observăm că dacă $x : [a, b] \to X$ este continuă, așa cum am presupus în enunțul teoremei 1.3.2.3.2, atunci funcția reală $t \to \| x(t) \|$, $t \in [a, b]$ este continuă pe $[a, b]$.

În sfîrșit, amintim

PROPOZIȚIA 5. *Dacă* f *și* g *sînt două funcții reale definite pe intervalul compact* $[a, b]$ *al dreptei numerice,* f *continuă și* g *cu variație mărginită pe* a, b, *atunci există* $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}g(t)$.

Faptul că $\int_a^b \| x(t) \|\, \mathrm{d} \bigvee_a^t (y)$ există, rezultă acum din propoziția 5 pentru

$$f(t) = \| x(t) \|, \quad g(t) = \bigvee_a^t (y), \quad t \in [a, b].$$

Să trecem acum la demonstrarea teoremei 1.3.2.3.2.

Fie

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

o diviziune arbitrară a lui $[a, b]$ și

$$\sigma_\Delta (x, y, \tau_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\tau_k) \cdot (y(t_{k+1}) - y(t_k)).$$

Avem

$$\| \sigma_\Delta(x, y, \tau_k) \| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| x(\tau_k) \| \, \| y(t_{k+1}) - y(t_k) \| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| x(\tau_k) \| \bigvee_{t_k}^{t_{k+1}} (y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \| x(\tau_k) \| \left[\bigvee_a^{t_{k+1}} (y) - \bigvee_a^{t_k} (y) \right] = \sigma_\Delta \left(\| x \|, \bigvee_a^t (y), \tau_k \right).$$

Cum $\int_a^b x(t) \, \mathrm{d}y(t)$ există, ca și $\int_a^b \| x(t) \| \, \mathrm{d} \bigvee_a^t (y)$, inegalitatea

$$\| \sigma_\Delta(x, y, \tau_k) \| \leqslant \sigma_\Delta(\| x \|, \bigvee_a (y), \tau_k)$$

pe care am obținut-o mai înainte, arată că

$$\left\| \int_a^b x(t) \mathrm{d} \, y(t) \right\| \leqslant \int_a^b \| x(t) \| \, \mathrm{d} \bigvee_a^t (y).$$

Ultima inegalitate din (1.3.2.3.1) se obține astfel

$$\int_a^b \| x(t) \| \, \mathrm{d} \bigvee_a^t (y) \leqslant \int_a^b \max_{t \in [a, b]} \| x(t) \| \, \mathrm{d} \bigvee_a^t (y) =$$

$$= \max_{t \in [a, b]} \| x(t) \| \bigvee_a^t (y) \Big|_a^b = \max_{t \in [a, b]} \| x(t) \| \bigvee_a^b (y).$$

DEFINIȚIA 1.3.2.3.2. Fie X un spațiu Banach reflexiv și real, $[a, b]$ un compact al dreptei numerice și $x : [a, b] \to X$.

Drumul $(x, I[x])$ *se numește regulat* dacă x este continuă și cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Este evident că un drum echivalent cu un drum regulat este de asemenea regulat. Acest fapt permite să punem

DEFINIȚIA 1.3.2.3.3. O curbă care conține un drum regulat se numește *curbă regulată.*

DEFINIȚIA 1.3.2.3.4. Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și fie $\omega \subset X$. Mulțimea ω se zice *conexă* dacă pentru orice două puncte x_1, x_2 din ω există un drum $(x, I[x])$, cu $I(x] \subset \omega$ și astfel ca $x_1 \in I[x]$, $x_2 \in I[x]$.

Fie X, Y, Z trei spații Banach reflexive și reale. Fie că, pentru orice două elemente $x \in X$, $y \in Y$, este definită înmulțirea $y \cdot x$, rezultatul înmulțirii fiind un element din Z și că sînt satisfăcute condițiile 1°, 2°, 3°, 4° impuse în subparagraful 1.3.2.3. Fie $\mathscr{C}$ o curbă regulată a cărei

imagine este în ω și $(x, I[x])$ un drum al său ($x : [a, b] \to X$, $I[x] \subset \omega$), $\omega \subset X$ fiind presupusă conexă și deschisă).

Fie Φ o aplicație continuă a lui X în Y. Prin definiție,

$$\int_a^b \Phi[x(t)]\, \mathrm{d}x(t) \qquad (1.3.2.3.2)$$

se numește integrala curbilinie a lui Φ de-a lungul curbei $\mathcal{C}$. Să observăm că integrala (1.3.2.3.2) există, în conformitate cu teorema 1.3.2.3.1, deoarece funcția

$$t \to \Phi[x(t)], \qquad t \in [a, b]$$

este continuă iar x este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Definiția este corect pusă, căci dacă $(x', I[x'])$ este un drum echivalent cu $(x, I[x])$, $x' : [\alpha, \beta] \to X$, în conformitate cu proprietatea 8° a integralei Stieltjes deja menționată, avem

$$\int_a^b \Phi[x(t)]\, \mathrm{d}x(t) = \int_\alpha^\beta \Phi[x'(\tau)]\, \mathrm{d}x'(\tau).$$

De aceea, dacă $(x, I[x])$ este un drum regulat al curbei $\mathcal{C}$, vom nota

$$\int_a^b \Phi[x(t)]\, \mathrm{d}x(t) = \int_{\mathcal{C}} \Phi(x)\, \mathrm{d}x.$$

DEFINIȚIA 1.3.2.3.5. Fie X un spațiu Banach reflexiv și real. Mulțimea $\omega \subset X$ se zice *simplu conexă* dacă pentru orice curbă $\mathcal{C}$ a cărei imagine este în ω și pentru orice punct $x_0 \in \omega$, există o aplicație

$$x : [a, b] \times [0,1] \to X$$

astfel ca $x(t, 0)$ să fie o reprezentare a curbei $\mathcal{C}$ iar $x(t, 1) = x_0$ (cu alte cuvinte, imaginea oricărei curbe din ω poate fi deformată continuu la un punct arbitrar din ω).

Fie X, Y două spații Banach reflexive și reale și $\mathcal{L}(X, Y)$ spațiul Banach al aplicațiilor liniare și continue de la X la Y. Fie Φ o aplicație continuă de la X la $\mathcal{L}(X, Y)$:

$$\Phi : X \to \mathcal{L}(X, Y).$$

Pentru orice $x \in X$, $h \in X$, să punem

$$\Phi(x) \cdot h = [\Phi(x)]\,(h)$$

Evident, proprietățile 1° — 4° impuse de (A) sînt satisfăcute.

TEOREMA 1.3.2.3.3 (Govurin). *Fie* ω *deschisă şi simplu conexă în* X *şi* $\Phi : \omega \to \mathcal{L}(X, Y)$, Φ *continuu pe* ω.

O condiţie necesară şi suficientă pentru ca integrala

$$\int_{\mathscr{C}} \Phi(x)\, dx$$

să nu depindă de curba din ω *după care se integrează este ca să existe un operator*

$$F : \omega \to Y$$

derivabil în sens Gâteaux în orice punct din ω *şi astfel ca*

$$F'(x) = \Phi(x); \quad x \in \omega. \tag{1.3.2.3.3}$$

Demonstraţie. Necesitatea. Fie că

$$\int_{\mathscr{C}} \Phi(x)\, dx$$

nu depinde de curba regulată $\mathscr{C}$ din ω după care se integrează; aşadar, oricare ar fi $x_1, x_2 \in \omega$ şi o curbă regulată $\mathscr{C}$ care are pe x_1 şi x_2 drept „extremităţi",

$$\int_{\mathscr{C}} \Phi(x)\, dx$$

depinde doar de x_1 şi x_2 nu şi de curba $\mathscr{C}$.

Această presupunere va permite să definim operatorul F pretins de teorema lui Govurin, după cum urmează:

Fie x_0 un punct fixat în ω, altfel, arbitrar. Oricare ar fi $x \in \omega$, vom pune prin definiţie

$$F(x) = \int_{t_0}^{t} \Phi(\tilde{x}(\tau))\, d\tilde{x}(\tau), \tag{1.3.2.3.4}$$

unde

$$\tilde{x} : [t_0, t] \to \omega, \qquad \tilde{x}(t_0) = x_0, \qquad \tilde{x}(t) = x$$

este o reprezentare a unui arc regulat arbitrar a cărui imagine este în ω şi ale cărui extremităţi sînt x_0 şi x.

Evident, pentru orice $x \in \omega$, $F(x) \in Y$.

Vom dovedi acum că este satisfăcută şi relaţia (1.3.2.3.3):

$$F'(x) = \Phi(x), \qquad x \in \omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $h \in X$ și $x \in \omega$. Cum ω este deschisă, există $B(x; r)$ și $\alpha \geqslant 0$ astfel ca pentru orice (Δt) cu $|\Delta t| < \alpha$, să avem

$$x + (\Delta t)\, h \in B(x; r) \subset \omega.$$

Ținînd seama de modul în care a fost definit F, avem

$$F(x + (\Delta t)\, h) = \int_{t_0}^{t'} \Phi(\bar{x}(\xi))\, \mathrm{d}\bar{x}(\xi),$$

unde $\bar{x}$ este o reprezentare a unui arc regulat arbitrar ce are pe x și $x + (\Delta t)\, h$ ca extremități și a cărui imagine este în ω :

$$\bar{x} : [t_0, t'] \to \omega, \qquad \bar{x}(t_0) = x_0, \qquad \bar{x}(t') = x + (\Delta t)\, h, \quad I[\bar{x}] \subset \omega.$$

Cum, prin ipoteză, rezultatul integrării și deci valoarea lui F în punctul $x + (\Delta t)\, h$ nu depind de arcul ce „unește" pe x_0 cu $x + (\Delta t)\, h$, fie acest arc cu următoarea reprezentare

$$\bar{x}(\tau) = \begin{cases} x(\tau) & \tau \in [t_0, t) \\ x(t) + (\tau - t)\, h & \tau \in [t, t + \Delta t]. \end{cases} \tag{1.3.2.3.5}$$

Așadar

$$F(x + (\Delta t)\, h) = \int_{t_0}^{t+\Delta t} \Phi(\bar{x}(\tau))\, \mathrm{d}\bar{x}(\tau). \tag{1.3.2.3.6}$$

Din (1.3.2.3.4) și (1.3.2.3.6), ținînd seama de reprezentarea (1.3.2.3.5), rezultă

$$F(x + (\Delta t)\, h) - F(x) = \int_{t}^{t+\Delta t} \Phi(\bar{x}(\tau))\, \mathrm{d}\bar{x}(\tau) =$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} \Phi(\bar{x}(\tau))\, \mathrm{d}(x(t) + (\tau - t)\, h),$$

de unde

$$\frac{1}{\Delta t}[F(x + (\Delta t)\, h) - F(x)] = \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} \Phi(\bar{x}(\tau))\, \mathrm{d}\,(x(t) + (\tau - t)\, h). \tag{1.3.2.3.7}$$

Pe de altă parte,

$$\Phi(x) \cdot h = \Phi[x(t)] \cdot h = \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} \Phi[x(t)]\, \mathrm{d}\,(x(t) + (\tau - t)\, h). \tag{1.3.2.3.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem, într-adevăr,

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\Phi[x(t)]\,\mathrm{d}(x(t)+(\tau-t)\,h)=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[\Phi[x(t)]\cdot h]\,\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[\Phi[x(t)]\,(h)]\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\Delta t}\Phi[x(t)]\,(h)\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}\tau=\Phi[x(t)](h)=\Phi[x(t)]\cdot h.$$

Din (1.3.2.3.7) şi (1.3.2.3.8) rezultă

$$\frac{1}{\Delta t}[F(x+(\Delta t)\,h)-F(x)]-\Phi(x)\cdot h=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[\Phi(\bar{x}(\tau))-\Phi[x(t)]]\,\mathrm{d}\bar{x}\,(\tau)$$

În conformitate cu teorema 1.3.2.3.2 urmează

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}[F(x+(\Delta t)\,h)-F(x)]-\Phi(x)\cdot h\right\|=$$

$$=\frac{1}{|\Delta t|}\left\|\int_t^{t+\Delta t}[\Phi(\bar{x}(\tau))-\Phi(x(t))]\,\mathrm{d}\bar{x}(\tau)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|\Delta t|}\max_{\tau\in[t,\,t+\Delta t]}\|\Phi(\bar{x}(\tau))-\Phi(x(t))\|\bigvee_t^{t+\Delta t}(\bar{x})=$$

$$=\max_{\tau\in[t,\,t+\Delta t]}\|\Phi(\bar{x}(\tau))-\Phi(x(t))\|\,\|h\|, \qquad (1.3.2.3.9)$$

unde s-a ţinut seama că pentru

$$\bar{x}(\tau)=x(t)+(\tau-t)\,h$$

avem

$$\bigvee_t^{t+\Delta t}(\bar{x})=|\Delta t|\,\|h\|.$$

Din (1.3.2.3.9) urmează

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{1}{\Delta t}[F(x+(\Delta t)\,h)-Fx)]-\Phi(x)\cdot h\right\|=0 \qquad (1.3.2.3.10)$$

căci pentru $\tau\in[t,\,t+\Delta t]$, avem

$$\|\bar{x}(\tau)-x(t)\|=|\tau-t|\,\|h\|$$

și deci

$$\lim_{\Delta t \to 0} \| \bar{x}(\tau) - x(t) \| = 0$$

iar în baza continuității lui Φ, rezultă

$$\lim_{\Delta t \to 0} \| \Phi(\bar{x}(\tau)) - \Phi(x(t)) \| = 0.$$

Relația (1.3.2.3.10) arată că pentru orice $x \in \omega$ avem

$$F'(x) = \Phi(x)$$

și cum Φ este continuu, rezultă că F este diferențiabil și în sens Fréchet pe ω și că

$$(\mathrm{d}F)\,(x) = F'(x) = \Phi(x).$$

Suficiența. Fie că există operatorul $F : \omega \to Y$ derivabil în sens Gâteaux pe ω și astfel ca

$$F'(x) = \Phi(x); \quad x \in \omega. \tag{1.3.2.3.11}$$

Vom dovedi că în acest caz

$$\int_{\mathscr{C}} \Phi(x)\, \mathrm{d}x,$$

unde $\mathscr{C}$ este o curbă regulată a cărei imagine este în ω, nu depinde de curba $\mathscr{C}$ în ω. Deoarece ω este simplu conexă, este suficient să dovedim acest lucru pentru segmentele din ω (a se vedea Vainberg [66 f], consecința 2.1 a teoremei 2.6, p. 51).

Fie așadar x_1, x_2 două puncte din ω și $x : [0,1] \to \omega$ după cum urmează

$$t \xrightarrow{x} t x_2 + (1 - t)\, x_1, \quad t \in [0, 1].$$

Este evident că drumul $(x, I\,[x])$ este regulat.

Avem

$$\int_0^1 \Phi[x(t)]\, \mathrm{d}x(t) = \int_0^1 (\Phi(x(t)) \cdot [x_2 - x_1])\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (\Phi(x(t))\, [x_2 - x_1])\, \mathrm{d}t. \tag{1.3.2.3.12}$$

Într-adevăr, dacă

$$\Delta : t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

este o diviziune arbitrară a lui $[0,1]$ și $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, avem

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(x(\tau_k)) \cdot (x(t_{k+1}) - x(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(x(\tau_k)) \cdot [(x_2 - x_1)(t_{k+1} - t_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(x(\tau_k))([x_2 - x_1](t_{k+1} - t_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\Phi(x(\tau_k))[x_2 - x_1]) \cdot (t_{k+1} - t_k) = \sigma_\Delta(\Phi(x)[x_2 - x_1], t, \tau_k). \quad (1.3.2.3.13)$$

Cum în virtutea ipotezelor făcute asupra lui Φ aplicația

$$t \to \Phi(x(t))[x_2 - x_1], \ t \in [0, 1]$$

este continuă, din (1.3.2.3.13) rezultă (1.3.2.3.12).

Ținînd seama de (1.3.2.3.11), din (1.3.2.3.12) rezultă

$$\int_0^1 \Phi(x(t))\, \mathrm{d}x(t) = \int_0^1 (\Phi(x_1 + t(x_2 - x_1)) \cdot [x_2 - x_1])\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (F'(x_1 + t(x_2 - x_1)) \cdot [x_2 - x_1])\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x_1 + t(x_2 - x_1))\right] \mathrm{d}t = F(x_2) - F(x_1).$$

TEOREMA 1.3.2.3.4. (Teorema lui Govurin de potențialitate pentru operatori nediferențiabili în sens Gâteaux) [66 f]. *Fie* Φ *o aplicație continuă de la* X *la* X^* *și* $\omega \subset X$, ω *simplu conexă și deschisă.*

O condiție necesară și suficientă pentru ca Φ *să fie potențial pe* ω *este ca*

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \Phi(x), \mathrm{d}x \rangle$$

să nu depindă de $\mathcal{C}$ *în* ω.

Demonstrație. Este suficient să se particularizeze teorema anterioară luînd $Y = R$.

Vom încheia acest paragraf cu următoarea remarcă: Fie că sînt îndeplinite condițiile teoremei 1.3.2.3.3. Este evident (vezi demonstrația necesității teoremei 1.3.2.3.3) că operatorul F este construit pînă la o constantă aditivă F_0; așadar, dacă F furnizat de teorema lui Govurin prin formula (1.3.2.3.4) satisface condițiile teoremei, atunci și

$$x \to F(x) = F_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

le satisface, dacă F_0 este un element fixat al lui Y^*.

Cum în (1.3.2.3.4) integrala nu depinde de curba $\mathcal{C}$, iar ω este simplu conexă, se poate alege drept curbă $\mathcal{C}$ în ω, segmentul ce unește punctele x_0 și x, astfel că din (1.3.2.3.4) rezultă

$$F(x) = F_0 + \int_0^1 \left[\Phi(x_0 + t(x - x_0))\cdot(x - x_0)\right] dt;\ F_0 = F(x_0).$$

În particular, în condițiile teoremei 1.3.2.3.4, legătura dintre funcționala f și gradientul său este

$$f(x) = f_0 + \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0\rangle\, dt;\ f_0 = f(x_0). \qquad (1.3.2.3.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

Proprietăţi extremale ale funcţionalelor neliniare

În acest capitol formulăm condiţii suficiente pentru existenţa şi unicitatea unui punct de extremum pentru funcţionale neliniare pe spaţii Banach reflexive şi reale. În obţinerea unor asemenea rezultate un rol important îl joacă proprietatea spaţiilor Banach, reflexive de a fi cu sferă slab compactă (teorema lui Şmulian).

§2.1. Condiţii suficiente pentru slab inferior semicontinuitatea funcţionalelor neliniare pentru spaţii Banach reflexive [66 f], [47 b]

DEFINIŢIA 2.1.1. Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi F o funcţională pe X. Funcţionala F se zice *slab inferior semicontinuă în punctul* $x_0 \in X$ (respectiv *slab superior semicontinuă în* $x_0 \in X$) dacă oricare ar fi şirul x_n, $n \in N$ slab convergent la x_0, avem

$$F(x_0) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} F(x_n) \quad \text{(respectiv } \overline{\lim}_{n\to\infty} F(x_n) \leqslant F(x_0)\text{)} \tag{2.1.1}$$

DEFINIŢIA 2.1.2. Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi fie F o funcţională pe X. Funcţionala F se zice *coercivă pe* X dacă $F(u) \to \infty$ implică $\|u\| \to \infty$ şi reciproc.

Importanţa formulării unor condiţii suficiente pentru a asigura slab inferior semicontinuitatea funcţionalelor neliniare pe spaţii Banach reflexive reiese, între altele, din următoarea teoremă:

TEOREMA 2.1.1. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi fie F o funcţională pe X care are următoarele proprietăţi:*

1° *F este coercivă;*
2° *F este strict convexă;*
3° *F este slab inferior semicontinuă, pe X.*

Atunci

a) *F este mărginită inferior pe X;*
b) *există un punct unic $u_0 \in X$ în care F îşi atinge marginea inferioară, adică*

$$F(u_0) = \inf_{u\in X} F(u); \tag{2.1.2}$$

c) *orice şir minimizant al funcţionalei F pe X converge slab la u_0.*

Demonstraţie. a) Vom începe prin a dovedi că F este mărginită inferior pe X. Vom dovedi că există o constantă c astfel încît

$$c \leqslant F(u) \tag{2.1.3}$$

oricare ar fi $u \in X$.

Să presupunem prin absurd că acest lucru n-ar fi adevărat, deci că oricare ar fi şirul de constante c_n, pentru fiecare $n \in N$, există $u_n \in X$ astfel încît

$$F(u_n) \leqslant c_n. \tag{2.1.4}$$

Dacă, în particular, şirul c_n este ales astfel încît $c_n \to -\infty$, din (2.1.4) rezultă

$$F(u_n) \to -\infty. \tag{2.1.5}$$

Pe de altă parte, şirul u_n din (2.1.5) nu poate fi decît mărginit. În caz contrar, din $\|u_n\| \to \infty$ rezultă, în virtutea coercivităţii lui F,

$$F(u_n) \to \infty, \tag{2.1.6}$$

ceea ce contrazice (2.1.5).

Şirul u_n fiind mărginit şi spaţiul X cu sferă slab compactă, din u_n se poate extrage un subşir u_{n_k} slab convergent. Fie u_0 limita slabă a lui u_{n_k}. Ţinînd seama că F este slab inferior semicontinuă pe X şi de asemenea de (2.1.5), rezultă

$$F(u_0) \leqslant \lim_{k \to \infty} F(u_{n_k}) = -\infty$$

ceea ce este absurd.

Există aşadar o constantă c astfel încît să fie satisfăcută (2.1.3) oricare ar fi $u \in X$.

Mulţimea de numere reale

$$M = \{F(u)/u \in X\}$$

este aşadar minorată, deci posedă o margine inferioară. Există aşadar

$$d = \inf_{u \in X} F(u). \tag{2.1.7}$$

b) Există $u_0 \in X$ astfel încît

$$F(u_0) = d. \tag{2.1.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, din definiția marginii inferioare a unei mulțimi de numere reale, rezultă existența unui șir u_n, $n \in N$, de puncte din X cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = d. \tag{2.1.9}$$

Un asemenea șir se numește, după cum se știe, șir minimizant al funcționalei F pe X.

Șirul u_n, $n \in N$, care satisface la (2.1.9), este mărginit, căci în caz contrar $F(u_n) \to \infty$, F fiind coercivă pe X.

Fiind mărginit, din u_n, $n \in N$, se poate extrage un subșir slab convergent, u_{n_k},

$$u_{n_k} \xrightarrow{\text{slab}} u_0,\ k \to \infty. \tag{2.1.10}$$

Funcționala F fiind slab inferior semicontinuă, din (2.1.10) rezultă

$$F(u_0) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} F(u_{n_k}). \tag{2.1.11}$$

Dar cum $F(u_{n_k})$ este un subșir al lui $F(u_n)$, din (2.1.9) rezultă

$$\varliminf_{k\to\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} F(u_{n_k}) = d. \tag{2.1.12}$$

Din (2.1.11) și (2.1.12) rezultă

$$F(u_0) \leqslant d. \tag{2.1.13}$$

Cum pe de altă parte avem, evident,

$$F(u_0) \geqslant d = \inf_{u\in X} F(u), \tag{2.1.14}$$

din (2.1.13) și (2.1.14) rezultă

$$F(u_0) = d = \inf_{u\in X} F(u) \tag{2.1.15}$$

Există așadar un punct în X care realizează minimul lui F pe X. Pentru a demonstra unicitatea acestui punct, este suficient să presupunem că ar exista două puncte distincte $u_1, u_2 \in X$, $u_1 \neq u_2$, cu proprietatea

$$F(u_1) = F(u_2) = d. \tag{2.1.16}$$

Cum F este strict convexă pe X, avem (vezi mai departe definiția (6.2.1) precum și paragraful din capitolul VI consacrat N-funcțiilor, care explică

originea acestei definiţii),

$$F\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left[F(u_1) + F(u_2)\right] = d$$

ceea ce contrazice faptul că $d = \inf_{u \in X} F(u)$.

Observaţie. Raţionamentul făcut la acest punct arată că dacă u_n este un şir minimizant al funcţionalei F pe X, limita slabă a oricărui subşir slab convergent al său realizează minimul lui F pe X. Fie, într-adevăr, u_n un şir minimizant al funcţionalei F pe X şi fie u_{n_p} un subşir slab convergent al său

$$u_{n_p} \xrightarrow{\text{slab}} u_1^0.$$

Din faptul că F este slab inferior semicontinuă, rezultă

$$F(u_1^0) \leqslant \varliminf_{p \to \infty} F(u_{n_p}) \tag{2.1.17}$$

şi ţinînd seama că $F(u_{n_p})$ este un subşir al lui $F(u_n)$ iar u_n este şir minimizant, din (2.1.17) rezultă că

$$F(u_1^0) \leqslant d$$

care cuplată cu (2.1.14) dă

$$F(u_1^0) = d$$

deci u_1^0 realizează minimul lui F pe X.

Cum, însă, există un singur punct în X care realizează minimul lui F pe X, deducem că toate subşirurile slab convergente ale unui şir minimizant al lui F pe X, au aceeaşi limită slabă în X şi anume punctul care realizează minimul lui F pe X (punct a cărui existenţă şi unicitate a fost demonstrată).

Cu această observaţie trecem la demonstrarea punctului c) al teoremei. Fie u_n un şir minimizant al lui F şi fie $u_0 \in X$, punctul de minim al lui F pe X. Vom dovedi că

$$u_n \xrightarrow{\text{slab}} u_0, \quad n \to \infty$$

deci că, oricare ar fi $f \in X^*$,

$$f(u_n) \to f(u_0), \quad n \to \infty. \tag{2.1.18}$$

Să presupunem contrariul, deci că ar exista o funcţională $f \in X^*$, astfel încît

$$f(u_n) \not\to f(u_0), \quad n \to \infty \tag{2.1.19}$$

așadar, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru orice $k \in N$, există n_k astfel încît

$$|f(u_{n_k}) - f(u_0)| > \varepsilon_0. \tag{2.1.20}$$

Inegalitatea (2.1.20) arată că nici un subșir al lui u_{n_k} un converge slab la u_0.

Șirul u_{n_k} este, însă, el însuși un șir minimizant și deci, conform unui raționament făcut anterior, este mărginit. Spațiul fiind cu sferă slab compactă și u_{n_k} fiind mărginit, din u_{n_k} se poate extrage un subșir $u_{n_{k_l}}$ slab convergent. Dar, după observația pe care am făcut-o la punctul b), toate subșirurile slab convergente ale unui șir minimizant au aceeași limită slabă, anume u_0.

Așadar,

$$u_{n_k} \xrightarrow{\text{slab}} u_0, \; l \to \infty$$

ceea ce contrazice (2.1.20), care arată că nici un subșir al lui u_{n_k} nu converge lab la u_0. Teorema este demonstrată.

Demonstrația teoremei anterioare arată că proprietatea funcționalei F de a fi strict convexă asigură, odată obținută existența, unicitatea punctului de minim al lui F pe X. În demonstrarea existenței, nu au intervenit decît proprietățile de coercivitate și slab inferior semicontinuitate ale lui F la care s-a adăugat proprietatea spațiului de a fi cu sferă slab compactă.

Această observație justifică preocuparea din teorema următoare de a da condiții suficiente pentru a asigura slab inferior semicontinuitatea funcționalelor neliniare pe spații Banach reflexive.

TEOREMA 2.1.2. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și f o funcțională pe X. Fie că f este derivabilă după Gâteaux pe X și că este satisfăcută inegalitatea*

$$f(x) - f(y) - f'(y) \cdot (x - y) \geqslant 0 \tag{2.1.21}$$

oricare ar fi x și y din X.

Atunci f este slab inferior semicontinuă pe X.

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$ și $x_n \xrightarrow{\text{slab}} x_0$. Din (2.1.21) rezultă

$$f(x_n) - f(x_0) \geqslant \langle f'(x_0), \; x_n - x_0 \rangle. \tag{2.1.22}$$

Cum $f'(x_0) \in X^*$ iar $x_n - x_0 \xrightarrow{\text{slab}} 0$, avem

$$\varliminf_{n\to\infty} \langle f'(x_0), \; x_n - x_0 \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f'(x_0), \; x_n - x_0 \rangle = 0$$

de care dacă se ţine seamă în (2.1.22) se obţine

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0) \tag{2.1.23}$$

şi teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.1.3. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi f o funcţională pe X. Fie că f are derivată de-al doilea ordin după Gâteaux pe X şi*

$$\langle f''(x)\cdot h,\ h\rangle \geqslant 0 \tag{2.1.24}$$

oricare ar fi $x,\ h\in X$.

Atunci f satisface condiţia (2.1.21), *oricare ar fi $x,\ y\in X$.*

Demonstraţie. Mai întîi să dovedim că (2.1.24) are sens. Am arătat că dacă f este derivabilă în sens Gâteaux pe X, atunci f' este definită de la X la X^* (a se vedea definiţia 1.2.1.2). Prin definiţie, $f''=(f')'$ şi cum $f':X\to X^*$, rezultă (a se vedea definiţia (1.2.1.1)) că

$$f'':X\to\mathcal{L}(X,X^*). \tag{2.1.25}$$

Aşadar, oricare ar fi $x\in X$, $f''(x)\in\mathcal{L}(X,X^*)$, deci $f''(x)\cdot h\in X^*$, oricare ar fi $h\in X$ şi deci $\langle f''(x)\cdot h,\ h\rangle$ are sens. În ceea ce priveşte notaţia, condiţia (2.1.24) este scrisă adesea sub forma (vezi Vainberg [66 f])

$$f''(x;h,h)>0. \tag{2.1.26}$$

În lumina explicaţiilor pe care le-am dat mai sus, considerăm notaţia din (2.1.2.4) mai sugestivă.

Să trecem acum la demonstraţia propriu-zisă.

Fie x şi y două puncte arbitrare din X. Aplicînd formula lui Lagrange (vezi teorema 1.2.1.1) rezultă:

$$f(x)-f(y)=\langle f'(y+\tau(x-y)),\ x-y\rangle,\ 0<\tau<1. \tag{2.1.27}$$

Egalitatea (2.1.27) se mai scrie

$$f(x)-f(y)=\langle f'(y),\ x-y\rangle+[\langle f'(y+\tau(x-y))-f'(y),\ x-y\rangle]=$$

$$=\langle f'(y),\ x-y\rangle+\langle f''(y+\tau'\tau(x-y))\cdot\tau(x-y),\ x-y\rangle=$$

$$=\langle f'(y),\ x-y\rangle+\tau\langle f''(y+\tau'\tau(x-y))\cdot(x-y),\ x-y\rangle,\quad \begin{matrix}0<\tau'<1,\\ 0<\tau<1,\end{matrix}$$

pentru obţinerea ultimei egalităţi utilizîndu-se, în evaluarea expresiei din paranteza dreaptă, formula lui Lagrange pentru operatori, în sensul precizat de teorema 1.2.1.2.

Așadar, avem

$$f(x)-f(y)-f'(y)\cdot(x-y)=\tau\langle f''(x+\tau'\tau(x-y))\cdot(x-y),\ x-y\rangle$$

din care, ținînd seama de (2.1.24), rezultă

$$f(x)-f(y)-f'(y)\cdot(x-y)\geqslant 0$$

adică (2.1.21).

Din teoremele 2.1.2, 2.1.3 rezultă

TEOREMA 2.1.4. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și f o funcțională pe X. Dacă f are derivată de-al doilea ordin în sens Gâteaux pe X și este satifăcută condiția*

$$\langle f''(x)\cdot h, h\rangle\geqslant 0 \tag{2.1.28}$$

pentru orice x și h din X, atunci f este slab inferior semicontinuă pe X.

Considerațiile care urmează au scopul de a furniza o condiție suficientă de continuitate slabă a funcționalelor. În esență, această condiție revine la proprietatea de compacitate a gradientului. Demonstrația necesită însă unele pregătiri, între care, obținerea uneia dintre cele mai importante proprietăți ale șirurilor slab convergente : mărginirea.

Obținerea acestui ultim rezultat necesită de asemenea o serie de rezultate pregătitoare, adaptate aici după [3].

Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și p o funcțională pe X cu următoarele proprietăți :

$$1)\ p(f+g)\leqslant p(f)+p(g) \tag{2.1.29}$$

oricare ar fi $f,\ g\in X$;

$$2)\ p(\alpha f)=|\alpha|p\quad(\tag{2.1.30}$$

oricare ar fi α real și $f\in X$.

Observația 1. Din (2.1.30), pentru $\alpha=0$, se obține

$$p(0f)=p(0)=|0|p(f)=0. \tag{2.1.31}$$

Observația 2. Din (2.1.29), (2.1.30), (2.1.31) rezultă :

$$p[f+(-f)]=p(0)=0\leqslant p(f)+p(-f)=p(f)+|-1|p(f)=2p(f)$$

așadar

$$p(f)\geqslant 0,\quad f\in X. \tag{2.1.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 2.1.1. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și fie p o funcțională pe X care satisface* (2.1.29) *și* (2.1.30) *și, în plus, este inferior semicontinuă pe X.*

Atunci, există o constantă $M>0$, astfel încît

$$p(h) \leqslant M \|h\| \tag{2.1.33}$$

oricare ar fi $h \in X$.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că lipsa modulului în (2.1.33) este consecință a proprietății (2.1.32) a lui p.

Apoi că, pentru a obține, în ipotezele lemei 2.1.1, relația (2.1.33) este suficient să demonstrăm că în ipotezele lemei 2.1.1, p este mărginită în bula închisă centrată în origine și de rază unitate, deci că oricare ar fi $u \in X$ cu $\|u\| \leqslant 1$,

$$p(u) \leqslant M. \tag{2.1.34}$$

Fie $B'(0,1)$ bula închisă centrată în origine și de rază unitate. Începem prin a observa că dacă p nu este mărginită în $B'(0;1)$, atunci p nu este mărginită în nici o altă bulă închisă din X. Să presupunem, prin absurd, că deși p nu este mărginită în $B'(0;1)$, există o constantă $C>0$ și o bulă închisă $B'(g;\rho)$, astfel încît, oricare ar fi h cu $\|h-g\| \leqslant \rho$, avem

$$p(h) < 2C. \tag{2.1.35}$$

Cînd h parcurge $B'(g;\rho)$, $f = \dfrac{h-g}{\rho}$ parcurge $B'(0;1)$ și avem

$$p(f) = \frac{1}{\rho}\, p(h-g) \leqslant \frac{1}{\rho}\,(p(h) + p(g)) < \frac{2C}{\rho}$$

ceea ce contrazice presupunerea că p n-ar fi mărginită în $B'(0;1)$. Să trecem acum la a demonstra că, în ipotezele lemei 2.1.1, p este mărginită în $B'(0;1)$.

Să presupunem că p n-ar fi mărginită în $B'(0;1)$, deci că pentru orice n natural, există $f_n \in B'(0;1)$ astfel încît $p(f_n) > n$. Fie $n=1$. Există, conform presupunerii făcute, $f_1 \in B'(0;1)$ astfel încît $p(f_1) > 1$, deci astfel încît $p(f_1)$ să se scrie

$$p(f_1) = 1 + \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Utilizînd semicontinuitatea inferioară a lui p, vom dovedi că p ia valori mai mari ca unitatea într-o vecinătate a lui f_1. Fie, într-adevăr, $0 < \varepsilon < \alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcționala p fiind inferior semicontinuă pe X, pentru un asemenea ε există $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi h cu $\|h - f_1\| < \delta$, avem

$$-\varepsilon < p(h) - p(f_1)$$

adică

$$p(h) > p(f_1) - \varepsilon = 1 + \alpha - \varepsilon > 1. \tag{2.1.37}$$

Așadar, oricare ar fi $h \in B'(f_1;\ \delta)$, $p(h) > 1$. Evident, se poate alege δ astfel încît

$$B'(f_1;\ \delta) \subset B'(\theta;\ 1).$$

Într-adevăr, singura dificultate ar fi ca f_1 să fie pe frontiera lui $B'(\theta;1)$, dar atunci, cum p ia valori mai mari ca 1 într-o vecinătate a lui f_1, există un punct interior al lui $B'(\theta;1)$ în care p ia valori mai mari ca unitatea și care poate fi luat în raționamente în locul lui f_1.

Fie $\rho_1 = \min\left(\delta, \frac{1}{2}\right)$. Există deci

$$B'(f_1;\ \rho_1) \subset B'(\theta;\ 1),\quad \rho_1 < \frac{1}{2}$$

astfel încît oricare ar fi $h \in B'(f_1;\ \rho_1)$, $p(h) > 1$. Am arătat însă că, dacă p nu este mărginită în $B'(\theta;1)$, atunci p nu este mărginită în nici o altă bulă închisă a lui X. Așadar, pentru $n = 2$, există în $B'(f_1;\ \rho_1)$ un element f_2 astfel încît $p(f_2) > 2$. După o construcție analoagă celei de mai sus, există $B'\left(f_2;\ \rho_2 < \frac{\rho_1}{2}\right) \subset B'(f_1;\ \rho_1)$ astfel încît, oricare ar fi $h \in B'(f_2;\ \rho_2)$, $p(h) > 2$. Continuînd procesul, se obține șirul de bule închise

$$B'(\theta;1) \supset B'(f_1;\ \rho_1) \supset B'(f_2;\ \rho_2) \supset \ldots \supset B'(f_n;\ \rho_n) \supset \ldots \tag{2.1.38}$$

cu $\rho_n < \frac{1}{2}\rho_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\rho_0 = 1$, astfel încît, oricare ar fi $h \in B'(f_n;\ \rho_n)$, $p(h) > n$.

Vom dovedi că șirul

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

este un șir Cauchy, deci că pentru orice $\varepsilon > 0$ există n astfel încît, oricare ar fi $p > 1$,

$$\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon.$$

Este suficient să luăm n astfel încît $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Oricare ar fi $p > 1$,

$$f_{n+p} \in B'(f_{n+p}\,;\ \rho_{n+p}) \subset B'\,(f_n\,;\ \rho_n)$$

deci

$$\|f_{n+p} - f_n\| \leqslant \rho_n < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Fie f limita şirului f_n.

Pe de altă parte, dintr-o cunoscută teoremă a lui Cantor, rezultă existenţa unui punct f' care aparţine oricăreia dintre mulţimile închise ale şirului descendent de mulţimi închise (2.1.38) : $f' \in B'\,(f_n\,;\ \rho_n)$ oricare ar fi $n \in N$, deci $p\,(f') > n$, oricare ar fi $n \in N$.

Vom dovedi că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, avem

$$\|f' - f\| < \varepsilon. \tag{2.1.39}$$

Într-adevăr,

$$\|f' - f\| \leqslant \|f' - f_n\| + \|f_n - f\|. \tag{2.1.39'}$$

Cum însă $f' \in B'\,(f_n,\ \rho_n)$, $f_n \in B'\,(f_n,\ \rho_n)$,

$$\|f' - f_n\| \leqslant \rho_n < \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.40}$$

pentru $n > N_1\,(\varepsilon)$.

De asemenea, $f_n \to f$ şi deci

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.41}$$

pentru $n > N_2\,(\varepsilon)$.

Pentru $n = \max\,(N_1, N_2)$ sînt satisfăcute atît (2.1.40) cît şi (2.1.41), iar din (2.1.39') rezultă (2.1.39). Din (2.1.39), ţinînd seama că $p\,(f') > n$ oricare ar fi n şi de semicontinuitatea inferioară a lui p, rezultă

$$p\,(f) > n,$$

oricare ar fi $n \in N$, contradicţie. Presupunerea că în ipotezele lemei 2.1.1 p nu este mărginită în $B'\,(0\,;1)$ este, deci, falsă.

O consecinţă imediată a lemei precedente este

TEOREMA 2.1.3. *Fie p_n un şir de funcţionale avînd proprietăţile* (2.1.29), (2.1.30) *şi continue pe X. Dacă şirul numeric $p_n\,(h)$ este mărginit în fiecare punct $h \in X$, atunci funcţionala p definită după cum urmează*

$$h \in X,\ h \xrightarrow{p} p\,(h) = \sup_n p_n\,(h) \tag{2.1.42}$$

are de asemenea proprietăţile (2.1.29), (2.1.30) *şi este continuă pe X.*

Demonstrație. Ideea demonstrației este următoarea: vom dovedi că p definită de (2.1.42) are proprietățile (2.1.29), (2.1.30) și că este inferior semicontinuă pe X. Atunci, după lema 2.1.1, p este mărginită pe X, deci există $M > 0$ astfel încît, oricare ar fi $h \in X$, avem

$$p(h) \leqslant M \| h \|. \tag{2.1.43}$$

Dar, o funcțională cu proprietățile (2.1.29), (2.1.30) mărginită pe X este continuă pe X.

Într-adevăr, o consecință imediată a lui (2.1.29) este inegalitatea

$$|p(h) - p(g)| \leqslant p(h - g) \tag{2.1.44}$$

satisfăcută pentru orice h, $g \in X$.

Fie $h_n \to h \in X$. Atunci, din (2.1.43) și (2.1.44), urmează că

$$|p(h_n) - p(h)| \leqslant p(h_n - h) \leqslant M \| h_n - h \|$$

care arată că

$$p(h_n) \to p(h) \text{ cînd } h_n \to h$$

deci p este continuă pe X.

Rămîne deci să dovedim că p definită de (2.1.42), are proprietățile (2.1.29), (2.1.30) și că este inferior semicontinuă pe X.

Că p satisface condițiile (2.1.29), (2.1.30) rezultă imediat din definiția lui p, dacă se ține seama că p_n satisfac (2.1.29) și (2.1.30).

Să mai dovedim că p este inferior semicontinuă pe X.

Fie $h_0 \in X$. Din definiția lui p,

$$p(h_0) = \sup_n p_n(h_0)$$

și deci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există N astfel încît

$$p(h_0) - p_N(h_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.45}$$

Pe de altă parte, p_N este continuă în h_0 și deci, pentru $\varepsilon > 0$ dat, există $\delta > 0$ astfel încît, dacă $\| h - h_0 \| < \delta$,

$$-\frac{\varepsilon}{2} < p_N(h) - p_N(h_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.46}$$

Vom dovedi că pentru ε dat, δ furnizat de continuitatea lui p_N în h_0 este cel cu care se probează inferior semicontinuitatea lui p în h_0.

Fie, într-adevăr, h cu $\|h - h_0\| < \delta$.

Din (2.1.45) rezultă

$$-p(h_0) + p_N(h_0) > -\frac{\varepsilon}{2}$$

sau

$$p(h) - p(h_0) + p_N(h_0) - p(h) > -\frac{\varepsilon}{2}$$

sau, ținînd seama și de (2.1.46),

$$p(h) - p(h_0) > p(h) - p_N(h_0) - \frac{\varepsilon}{2} = \sup_n p_n(h) -$$

$$-p_N(h_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant p_N(h) - p_N(h_0) - \frac{\varepsilon}{2} > -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$$

care arată că p este inferior semicontinuă în h_0. Demonstrația este încheiată.

Este evident că teorema 2.1.3 poate fi enunțată și sub forma următoare:

TEOREMA 2.1.3'. *Fie p_n un șir de funcționale pe X care au proprietățile (2.1.29), (2.1.30) și care sînt semicontinue inferior pe X. Dacă în orice punct $h \in X$ șirul numeric $p_n(h)$ este mărginit, atunci funcționala p definită astfel*

$$h \in X,\ h \xrightarrow{p} p(h) = \sup_n p_n(h)$$

este continuă pe X.

Demonstrație. Este suficient să observăm că, cu privire la funcționalele p_n, sînt realizate condițiile lemei 2.1.1, deci p_n sînt continue pe X. Continuitatea lui p rezultă acum din teorema 1.2.3.

TEOREMA 2.1.4. *Fie că funcționalele liniare și continue pe X,*

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$$

sînt astfel încît șirul numeric $\Phi_n(h)$ este mărginit pentru orice $h \in X$. Atunci șirul normelor acestor funcționale este mărginit.

Demonstrație. Fie p_n funcționale definite pe X după cum urmează

$$h \in X,\ h \xrightarrow{p_n} p_n(h) = |\Phi_n(h)|. \tag{2.1.47}$$

În virtutea ipotezelor făcute asupra lui Φ_n, rezultă că p_n satisfac condițiile teoremei 2.1.3, și deci funcționala p definită pe X după cum urmează

$$h \in X,\ h \xrightarrow{p} p(h) = \sup_n p_n(h). \tag{2.1.48}$$

satisface (2.1.29), (2.1.30) și, în plus, este continuă pe X.

Așadar

$$M = \sup_{\|h\| \leqslant 1} p(h) < \infty.$$

Fie n_0 natural. Avem

$$\|\Phi_{n_0}\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1} |\Phi_{n_0}(h)| \leqslant \sup_{\|h\| \leqslant 1} [\sup_n |\Phi_n(h)|] =$$

$$= \sup_{\|h\| \leqslant 1} [\sup_n p_n(h)] = \sup_{\|h\| \leqslant 1} p(h) = M.$$

Vom trece acum la demonstrația teoremei pentru care au fost necesare toate aceste considerații.

TEOREMA 2.1.5. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real. Orice șir slab convergent de elemente din X este mărginit.*

Demonstrație. Fie

$$f_k \xrightarrow{\text{slab}} f$$

Oricare ar fi $\Phi \in X^*$,

$$\langle \Phi, f_k \rangle \to \langle \Phi, f \rangle.$$

Șirul numeric $\langle \Phi, f_k \rangle$ fiind convergent oricare ar fi $\Phi \in X^*$, este mărginit, oricare ar fi $\Phi \in X^*$. Fie Ψ_n, $n \in N$, un șir de funcționale definite pe X^* după cum urmează:

$$\Phi \in X^*,\ \Phi \xrightarrow{\Psi_n} \Psi_n(\Phi) = \langle \Phi, f_n \rangle.$$

În conformitate cu lema 1.2.2.2, Ψ_n sînt funcționale liniare și mărginite pe X^* și

$$\|\Psi_n\| = \|f_n\|. \tag{2.1.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru şirul de funcţionale Ψ_n, sînt satisfăcute însă ipotezele teoremei 2.1.4 şi deci şirul normelor acestor funcţionale este mărginit, ceea ce, ţinînd seama de (2.1.49), demonstrează teorema.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm următoarea teoremă [66 f]:

TEOREMA 2.1.6. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi f o funcţională pe X. O condiţie suficientă pentru ca f să fie slab continuă pe X este ca gradientul lui f să fie compact pe X.*

Demonstraţie. Din ipotezele teoremei 2.1.6 rezultă că se presupune că (grad) (f) este compact relativ la orice bulă închisă din X. Să dovedim, aşadar, că oricare ar fi şirul x_n de elemente din X,

$$x_n \xrightarrow{\text{slab}} x_0\,, \tag{2.1.50}$$

avem

$$f(x_n) \to f(x_0). \tag{2.1.51}$$

Să presupunem că n-ar fi aşa: deci că ar exista un şir

$$x_n \xrightarrow{\text{slab}} x_0$$

astfel încît

$$f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$$

deci că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît oricare ar fi k natural, există n_k de asemenea natural, astfel încît

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| > \varepsilon_0. \tag{2.1.52}$$

Inegalitatea (2.1.52) arată că nici un subşir al lui $f(x_{n_k})$ nu converge la $f(x_0)$.

Pe de altă parte, x_{n_k} este un subşir al lui x_n care este slab convergent şi deci, după teorema 2.1.5, mărginit. Există aşadar $R > 0$, astfel încît

$$\|x_0\| \leqslant R, \quad \|x_{n_k}\| \leqslant R, \quad k \in N. \tag{2.1.53}$$

Utilizînd formula lui Lagrange se obţine

$$f(x_{n_k}) - f(x_0) = \langle (\operatorname{grad} f)(x_0 + t_{n_k}(x_{n_k} - x_0)),\ x_{n_k} - x_0 \rangle \tag{2.1.54}$$

cu $0 < t_{n_k} < 1$, $n_k \in N$, deci ţinînd seama de (2.1.53), cu

$$\|x_0 + t_{n_k}(x_{n_k} - x_0)\| \leqslant R. \tag{2.1.55}$$

Cum după (2.1.55) şirul $x_0 + t_n \overset{k}{\sim} x_{n_k} - x_0)$ este mărginit iar $(\text{grad}\, f)$ este compact pe X, rezultă că şirul $(\text{grad}\, f)(x_0 + t_{n_k}(x_{n_k} - x_0))$ conţine un subşir $(\text{grad}\, f)(x_0 + t_{n_{k_p}}(x_{n_{k_p}} - x_0))$ convergent în X^*:

$$(\text{grad}\, f)(x_0 + t_{n_{k_p}}(x_{n_{k_p}} - x_0)) \to y_0 \in X^*. \tag{2.1.56}$$

Din (2.1.54) rezultă

$$f(x_{n_{k_p}}) - f(x_0) = \langle (\text{grad}\, f)(x_0 + t_{n_{k_p}}(x_{n_{k_p}} - x_0)),\ x_{n_{k_p}} - x_0 \rangle =$$

$$= \langle y_0,\ x_{n_{k_p}} - x_0 \rangle + \langle (\text{grad}\, f)\ (x_0 + t_{n_{k_p}}\ (x_{n_{k_p}} - x_0)) - y_0,\ x_{n_{k_p}} - x_0 \rangle$$

de unde

$$|f(x_{n_{k_p}}) - f(x_0)| \leqslant |\langle y_0,\ x_{n_{k_p}} - x_0 \rangle| + \|(\text{grad}\, f)(x_0 + t_{n_{k_p}}(x_{n_{k_p}} - x_0)) - y_0\| \cdot 2R$$

în care, dacă se trece la limită cu $p \to \infty$,

$$\lim_{p \to \infty} |f(x_{n_{k_p}}) - f(x_0)| = 0$$

care arată că $f(x_{n_{k_p}})$, subşir al lui $f(x_{n_k})$, converge la $f(x_0)$, ceea ce contrazice (2.1.52), care arată că nici un subşir al lui $f(x_{n_k})$ nu converge la $f(x_0)$.

Avînd un criteriu suficient pentru ca o funcţională să fie slab continuă pe un spaţiu Banach reflexiv, vom trece la demonstrarea unei proprietăţi importante a funcţionalelor slab continue pe mulţimi mărginite, închise şi convexe din spaţii hilbertiene [66 f].

TEOREMA 2.1.7. *Fie H un spaţiu hilbertian real şi $\Omega \subset H$ o mulţime mărginită, convexă şi închisă a cărei frontieră vom nota-o cu $\dot{\Omega}$.*

Dacă f este o funcţională slab continuă pe Ω, atunci, oricare ar fi x_0, punct interior al lui Ω, există $x \in \dot{\Omega}$ astfel că $f(x)$ aproximează oricît de bine pe $f(x_0)$.

Demonstraţie. Mulţimea Ω este mărginită, deci există o bulă închisă $B'(0; R)$ astfel că

$$\Omega \subset B'(0; R).$$

Fie $S(0; R)$ coaja acestei bule şi şirul x_n de puncte aparţinînd la $S(0; R)$,

$$\|x_n\| = R, \quad x_n \xrightarrow{\text{slab}} 0 \tag{2.1.57}$$

unde 0 este zeroul lui H.

Fie x_0 un punct interior lui Ω şi fie razele cu extremitatea în x_0, $x_0 + tx_n$, $t \geqslant 0$.

Fie t_n distanţa măsurată pe raza $x_0 + tx_n$ de la x_0 la $\dot{\Omega}$. Cum prin ipoteză Ω este mărginită, şirul t_n este mărginit. Din faptul că t_n este mărginit şi ţinînd seama că $x_n \xrightarrow{\text{slab}} 0$, rezultă $t_n x_n \xrightarrow{\text{slab}} 0$, şi deci

$$x_0 + t_n x_n \xrightarrow{\text{slab}} x_0. \tag{2.1.58}$$

Cum însă f este slab continuă pe Ω,

$$f(x_0 + t_n x_n) \to f(x_0). \tag{2.1.59}$$

Aşadar, fiind dat $\varepsilon > 0$, există n_0 astfel încît, dacă $n > n_0$, avem

$$|f(x_0 + t_n x_n) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.1.60}$$

Însă, prin construcţie, $x_0 + t_n x_n \in \dot{\Omega}$.

Cum x_0 este arbitrar în interiorul lui Ω, inegalitatea (2.1.60), cu $x_0 + t_n x_n \in \dot{\Omega}$, demonstrează teorema şi arată în acelaşi timp în ce sens trebuie luată afirmaţia din teorema (2.1.7) care spune că : „oricare ar fi x_0 punct interior lui Ω, există $x \in \dot{\Omega}$ astfel că $f(x)$ aproximează oricît de bine pe $f(x_0)$".

În ceea ce priveşte existenţa şi unicitatea punctelor de extremum pentru funcţionale neliniare, reamintim că am stabilit teorema 2.1.1. Cum am remarcat deja în comentariul făcut la această teoremă, proprietatea funcţională de a fi slab inferior semicontinuă şi coercivă precum şi proprietatea spaţiului de a fi cu sferă slab compactă au fost esenţiale în obţinerea existenţei punctului de minim. Stricta convexitate a funcţionalei pe spaţiul X asigura numai unicitatea acestui punct.

În cele ce urmează vom da de asemenea o teoremă de existenţa a punctului de minim pentru o funcţională care, de data aceasta, nu este definită pe întregul spaţiu, ci pe o submulţime a unui spaţiu cu sferă slab compactă. Se va presupune în continuare că funcţionala este slab inferior semicontinuă dar se va renunţa la proprietatea de coercivitate. Se înţelege că, atunci, obţinerea teoremei de exsitenţă a punctului de minim va fi posibilă numai datorită proprietăţilor speciale cu care va fi înzestrată mulţimea pe care este definită funcţionala.

Teorema 2.1.8. *Fie X un spaţiu Banach real cu sferă slab compactă şi Ω o mulţime mărginită şi slab închisă a sa.*

Dacă f este o funcţională slab inferior semicontinuă pe Ω, atunci f este mărginită inferior pe Ω şi-şi atinge marginea inferioară.

Demonstraţie [66 f] Vom dovedi mai întîi că în ipotezele teoremei 2.1.8, funcţionala f este mărginită inferior pe Ω. Să presupunem că

n-ar fi așa. Atunci, oricare ar fi $-n$, cu n natural, există x_n, $x_n \in \Omega$, astfel încît

$$f(x_n) < -n. \tag{2.1.61}$$

Cum Ω este presupusă mărginită, șirul x_n este de asemenea mărginit. Spațiul X fiind presupus cu sferă slab compactă, din x_n se poate extrage un subșir x_{n_k}, slab convergent

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{slab}} x_0 \tag{2.1.62}$$

cu $x_0 \in \Omega$, căci Ω este presupusă și slab închisă.

Dar f este slab inferior semicontinuă pe Ω și deci, din (2.1.62), rezultă

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}). \tag{2.1.63}$$

Din (2.1.61) rezultă însă că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty \tag{2.1.64}$$

iar din (2.1.63) și (2.1.64),

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$$

ceea ce este absurd.

Așadar f este mărginită inferior pe Ω.

Fie

$$d = \inf_{x\in\Omega} f(x) \tag{2.1.65}$$

și fie x_n un șir minimizant al funcționalei f pe mulțimea Ω, adică un șir de elemente din Ω cu proprietatea

$$f(x_n) \to d, \qquad n \to \infty. \tag{2.1.66}$$

(Existența unui asemenea șir decurge, cum am mai observat, din definiția marginii inferioare).

Șirul x_n fiind format cu elemente din Ω este mărginit, iar spațiul fiind cu sferă slab compactă, rezultă că x_n conține un subșir x_{n_p} slab convergent la un punct ce aparține lui Ω (căci Ω este slab închisă)

$$x_{n_p} \xrightarrow{\text{slab}} x^* \in \Omega. \tag{2.1.67}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (2.1.67), ținînd seama că f este slab inferior semicontinuă precum și de faptul că $f(x_{n_p})$ este un subșir al lui $f(x_n)$ care converge la d, rezultă

$$f(x^*) \leqslant \varliminf_{p \to \infty} f(x_{n_p}) = d. \tag{2.1.68}$$

Cum, pe de altă parte, din definiția marginii inferioare rezultă

$$f(x^*) \geqslant d \tag{2.1.69}$$

din (2.1.68) și (2.1.69) rezultă

$$f(x^*) = d \tag{2.1.70}$$

cu care am demonstrat existența unui punct x^* în Ω care realizează marginea inferioară a lui f pe Ω și am încheiat demonstrația.

§ 2.2. Funcționale cu proprietatea „m" [66 f]

Să revenim la teorema 2.1.7. Această teoremă furniza condiții suficiente pentru ca o funcțională definită pe o mulțime convexă și slab închisă a unui spațiu hilbertian să aibă proprietatea că valoarea ei în orice punct interior al acestei mulțimi este suficient de bine aproximată cu valori ale funcționalei în puncte situate pe frontiera mulțimii respective.

Se înțelege că dacă în condițiile teoremei 2.1.7, funcționala posedă un punct de minim pe mulțimea Ω, atunci valoarea minimă a funcționalei pe Ω poate fi oricît de bine aproximată cu valori ale funcționalei în puncte de pe frontiera lui Ω.

Funcționalele cu proprietatea „m" sînt, după cum vom vedea, funcționale care au o proprietate oarecum opusă : dacă o asemenea funcțională posedă un punct de minim pe o mulțime față de care funcționala are proprietatea „m", atunci, acest punct de minim nu poate fi decît interior mulțimii respective.

Definiția 2.2.1. Fie X un spațiu Banach real cu sferă slab compactă și Ω o mulțime mărginită și slab închisă a lui X. Fie f o funcțională slab inferior semicontinuă pe Ω. Se spune că f are proprietatea „m" relativ la mulțimea Ω dacă există un punct interior mulțimii Ω, fie el x_0, astfel încît

$$f(x) > f(x_0) \tag{2.2.1}$$

pentru orice $x \in \dot{\Omega}$, $\dot{\Omega}$ fiind frontiera lui Ω.

Următoarea teoremă este evidentă :

Teorema 2.2.1. *Fie X un spațiu Banach real cu sferă slab compactă, Ω o mulțime mărginită și slab închisă a lui X și f o funcțională slab inferior semicontinuă pe Ω ce are proprietatea „m" relativ la mulțimea Ω.*

Atunci, f este mărginită inferior pe mulțimea Ω și marginea sa inferioară este atinsă într-un punct interior mulțimii Ω.

Demonstrație. Se observă că relativ la funcțională, la mulțimea pe care aceasta este definită și la spațiul Banach din care face parte această mulțime, teorema 2.2.1 conservă ipotezele teoremei 2.1.8. După teorema 2.1.8 rezultă că f este mărginită inferior pe Ω și-și atinge marginea pe Ω. Rămîne să dovedim că în virtutea faptului că f are proprietatea „m" relativ la mulțimea Ω, punctul în care f își atinge marginea inferioară pe Ω nu poate aparține lui $\dot{\Omega}$.

Fie că ar exista un punct $x \in \dot{\Omega}$, cu proprietatea că

$$f(x) = d = \inf_{z \in \Omega} f(z). \tag{2.2.2}$$

Din definiția proprietății „m" a lui f relativ la Ω, rezultă însă existența unui punct x_0, interior lui Ω, astfel încît

$$d = f(x) > f(x_0)$$

ceea ce contrazice definiția marginii inferioare.

Presupunerea că f și-ar atinge marginea inferioară într-un punct din $\dot{\Omega}$ este falsă; și cum f își atinge totuși marginea inferioară pe Ω, urmează că și-o atinge într-un punct interior lui Ω.

Următoarea teoremă va furniza un exemplu de funcțională cu proprietatea „m" (a se vedea [66 f])

TEOREMA 2.2.2. *Fie X un spațiu Banach cu sferă slab compactă și f o funcțională pe X. Fie că:*

1° *f posedă derivată după Gâteaux de primul și al doilea ordin pe X;*

2° *oricare ar fi x, $h \in X$,*

$$\langle f''(x) \cdot h, h \rangle = f''(x; h, h) \geqslant \varphi(\|h\|)\,\|h\| \tag{2.2.3}$$

unde φ este o funcție numerică definită pe $0 \leqslant r < \infty$ cu următoarele proprietăți:

1° *φ este continuă și strict crescătoare;*

2° *$\varphi(0) = 0$;*

3° *$\varphi(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$.*

Atunci funcționala f are proprietatea „m" relativ la orice bulă închisă centrată în origine și de rază R aleasă astfel încît următoarea condiție să fie satisfăcută:

$$\int_0^1 \varphi(tR)\,dt > \|f'(0)\|. \tag{2.2.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Să remarcăm mai întîi că în virtutea faptului că φ este strict crescătoare și tinde la ∞ cu $r \to \infty$, condiția (2.2.4) poate fi într-adevăr satisfăcută pentru R suficient de mare.

Inegalitatea (2.2.3) atrage, în conformitate cu teorema 2.1.4, faptul că f este slab inferior semicontinuă pe X. Pe de altă parte, prin ipoteză, spațiul fiind cu sferă slab compactă, orice bulă închisă a lui X centrată în origine poate fi luată în rolul mulțimii Ω din definiția 2.2.1. Să mai demonstrăm doar că dacă R este astfel încît este satisfăcută condiția (2.2.4), atunci oricare ar fi $x \in X$ cu $\|x\| = R$, există $x_0 \in X$ cu $\|x_0\| < R$ astfel încît $f(x) > f(x_0)$.

Într-adevăr, legătura dintre funcționala f și gradientul său după Gâteaux este (a se vedea (1.3.2.3.14))

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \langle f'(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0\rangle\, dt \tag{2.2.5}$$

în care x_0 este un punct arbitrar al lui X.

Dacă în (2.2.5) se face $x_0 = \theta$, (θ fiind zeroul lui X) se obține

$$f(x) = f(\theta) + \int_0^1 \langle f'(tx), x\rangle\, dt. \tag{2.2.6}$$

Fie h un punct fixat (altfel arbitrar) al lui X și funcționala

$$x \in X,\ x \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(x) = \langle f'(x), h\rangle. \tag{2.2.7}$$

Formula (2.2.6) scrisă pentru funcționala (2.2.7) dă

$$\langle f'(x), h\rangle = \langle f'(\theta), h\rangle + \int_0^1 \langle \mathcal{F}'(tx), x\rangle\, dt. \tag{2.2.8}$$

Dar

$$\langle \mathcal{F}'(u), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}(u + tv) - \mathcal{F}(u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{f'(u + tv) - f'(u)}{t},\ h \right\rangle = \langle f''(u)\cdot v, h\rangle$$

astfel că (2.2.8) devine

$$\langle f'(x), h\rangle = \langle f'(\theta), h\rangle + \int_0^1 \langle f''(tx)\cdot x, h\rangle\, dt. \tag{2.2.9}$$

Făcînd în (2.2.9) $h = x$ și ținînd seama de (2.2.3) rezultă

$$\langle f'(x), x\rangle = \langle f'(\theta), x\rangle + \int_0^1 \langle f''(tx)\cdot x, x\rangle\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \langle f'(\theta), x\rangle + \varphi(\|x\|)\,\|x\| \tag{2.2.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că din (2.2.6) se obține

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \langle f'(tx), x\rangle \, dt = f(0) + \int_0^1 \langle f'(tx), tx\rangle \frac{dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant f(0) + \int_0^1 [\langle f'(0), tx\rangle + \varphi(\|tx\|)\,\|tx\|]\frac{dt}{t} =$$

$$= f(0) + \langle f'(0), x\rangle + \int_0^1 \varphi(\|tx\|)\,\|x\|\,dt.$$

În definitiv,

$$f(x) \geqslant f(0) + \langle f'(0), x\rangle + \int_0^1 \varphi(\|tx\|)\,\|x\|\,dt. \tag{2.2.11}$$

Cum din inegalitatea lui Cauchy rezultă, evident,

$$\langle f'(0), x\rangle \geqslant -\|f'(0)\|\,\|x\|, \tag{2.2.12}$$

din (2.2.11) se obține

$$f(x) \geqslant f(0) - \|f'(0)\|\,\|x\| + \int_0^1 \varphi(\|tx\|)\,\|x\|\,dt. \tag{2.2.13}$$

Fie în această inegalitate x cu $\|x\| = R$. Avem

$$f(x) \geqslant f(0) - R\left[-\|f'(0)\| + \int_0^1 \varphi(tR)\,dt\right] \tag{2.2.14}$$

și, ținînd seama de ipotezele făcute asupra funcției φ, rezultă că pentru R ales astfel încît să fie satisfăcută (2.2.4), din (2.2.14) rezultă

$$f(x) > f(0) \tag{2.2.15}$$

TEOREMA 2.2.3. *Fie X un spațiu Banach real și f o funcțională pe X. Fie că*

1°. *f posedă derivată în sens Gâteaux de primul și al doilea ordin pe X;*

2°. *oricare ar fi x, $h \in X$,*

$$\langle f''(x)\cdot h, h\rangle = f''(x; h, h) \geqslant \varphi(\|h\|)\,\|h\|, \tag{2.2.16}$$

unde φ *este o funcție reală definită pe* $0 \leqslant r < \infty$, *cu următoarele proprietăți:*

1) φ *este continuă și strict crescătoare;*

2) $\varphi(0) = 0$;

3) $\varphi(r) \to \infty$ *cînd* $r \to \infty$. (2.2.17)

Atunci, există un punct care realizează pentru f *un minim local.*

Demonstrație. Rezultă din teoremele 2.2.2 și 2.2.1.

Această ultimă teoremă cuplată cu cea care urmează ne va permite enunțarea unei teoreme de existență pentru operatori potențiali pe spații Banach reflexive. Deci mai întîi

TEOREMA 2.2.4. *Fie* f *o funcțională pe un domeniu* Ω *al unui spațiu Banach real* X. *Fie* x_0 *un punct interior al lui* Ω *și fie că* f *este diferențiabilă după Gâteaux în* x_0. *O condiție necesară pentru ca* x_0 *să fie un punct de extremum local pentru* f *este ca*

$$(Vf)(x_0) \equiv 0. \tag{2.2.18}$$

Demonstrație. Fie h un punct fixat din X. În virtutea faptului că x_0 este punct interior lui Ω și a proprietății absorbante a bulei deschise, rezultă existența unui număr $a > 0$ astfel încît $x + th \in \Omega$ oricare ar fi t, cu $|t| \leqslant a$. Fie funcția numerică

$$t \in [-a, a],\ t \overset{\varphi}{\to} \varphi(t) = f(x_0 + th). \tag{2.2.19}$$

Cum f este presupusă diferențiabilă după Gâteaux în x_0, rezultă că φ este derivabilă în $t = 0$, și avem

$$\varphi'(0) = (Vf)(x_0) \cdot h. \tag{2.2.20}$$

Dacă x_0 este punct de extremum local pentru f, rezultă că $t = 0$ este punct de extremum local pentru funcția numerică φ și deci, în mod necesar,

$$\varphi'(0) = 0 \tag{2.2.21}$$

sau, ținînd seama de (2.2.20),

$$(Vf)(x_0) \cdot h = 0 \tag{2.2.22}$$

cu h arbitrar în X, de unde (2.2.18).

TEOREMA 2.2.5. *Fie* X *un spațiu Banach reflexiv și real. Fie* $P : X \to X^*$ *un operator potențial pe* X, *derivabil după Gâteaux pe* X *și satisfăcînd pentru orice* $x, h \in X$, *următoarea inegalitate*

$$\langle P'(x) \cdot h, h \rangle \geqslant \gamma^2 \|h\|^2, \quad x, h \in X, \tag{2.2.23}$$

unde $\gamma^2 = const. > 0$.

Atunci P este surjectiv.

Demonstrație. Să dovedim, așadar, că în ipotezele teoremei 2.2.5, pentru orice $y \in X^*$, ecuația

$$P(x) = y \tag{2.2.24}$$

are soluție.

Fie f funcționala al cărei gradient pe X este P. După cum am văzut la teorema de potențialitate a operatorilor diferențiabili, f este definită astfel

$$x \in X,\ f(x) = \int_0^1 \langle P(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0\rangle\, dt + f(x_0), \tag{2.2.25}$$

unde $f(x_0)$ poate fi presupusă totdeauna egală cu zero și $x_0 = \theta$, deci

$$f(x) = \int_0^1 \langle P(tx), x\rangle\, dt. \tag{2.2.26}$$

Fie Ψ funcționala definită pe X după cum urmează

$$x \in X,\ \Psi(x) = f(x) - \langle y, x\rangle. \tag{2.2.27}$$

Este ușor de dovedit că Ψ posedă derivate de primul și al doilea ordin pe X și că

$$\Psi'(x)\cdot h = \langle P(x) - y, h\rangle, \tag{2.2.28}$$

$$\langle \Psi''(x)\cdot h, h\rangle = \langle P'(x)\cdot h, h\rangle. \tag{2.2.29}$$

Ținînd seama de (2.2.23), rezultă

$$\langle \Psi''(x)\cdot h, h\rangle \geqslant \gamma^2 \|h\|^2 \tag{2.2.30}$$

și deci, funcționala Ψ satisface condițiile teoremei 2.2.3 pentru $\varphi(r) = \gamma^2 r$.

În conformitate cu teorema 2.2.3, funcționala Ψ posedă un punct de minim local, fie el x_0.

Dar, după teorema 2.2.4, pentru orice $h \in X$, avem atunci

$$\Psi'(x_0)\cdot h = 0,$$

sau, ținînd seama de (2.2.28),

$$\langle P(x_0) - y, h\rangle = 0,\ h \in X,$$

adică

$$P(x_0) - y = 0$$

și teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.3. Teorema variațională a lui Langenbach [42 e]

TEOREMA 2.3.1. (Teorema variațională a lui Langenbach). *Fie* $\overline{\Omega}$ *aderența în* $E^{(m)}$ *a unui deschis mărginit* Ω *din spațiul euclidian real* $E^{(m)}$. *Vom presupune că frontiera lui* Ω, $\dot{\Omega} = \overline{\Omega} \cap \complement\Omega$, *este suficient de regulată.*

Fie de rezolvat ecuația

$$Pu = f \tag{2.3.1}$$

cu condițiile la frontieră, liniare și omogene

$$\Gamma_i u = 0, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{2.3.2}$$

În (2.3.1) f este o funcție scalară sau vectorială de coordonate pe Ω, considerată ca aparținînd unui spațiu hilbertian real $H(\Omega)$ iar P este un operator în general neliniar.

În (2.3.2), Γ_i sînt operatori liniari.

Fie M mulțimea punctelor lui $H(\Omega)$ a căror imagine prin P aparține încă lui $H(\Omega)$,

$$M = \{u/u \in H(\Omega),\ Pu \in H(\Omega)\} \tag{2.3.3}$$

și fie M^0, mulțimea punctelor lui M care satisfac condițiile la frontieră (2.3.2),

$$M^0 = \{u/u \in M,\ \Gamma_i u = 0, \quad i = 1, \ldots, s\}. \tag{2.3.4}$$

Vom presupune că:

1° M^0, M sînt mulțimi liniare ale lui $H(\Omega)$, dense în $H(\Omega)$;

2° $(DP)(u)\cdot h$ există oricare ar fi $u, h \in M$, liniară cu h și continuă cu u în orice hiperplan bidimensional ce trece prin u;

3° $\langle (DP)(u)\cdot h_1, h_2\rangle_{H(\Omega)} = \langle (DP)(u)\cdot h_2, h_1\rangle_{H(\Omega)}$ oricare ar fi $u \in M$, $h_1, h_2 \in M^0$;

4° $\langle (DP)(u)\cdot h, h\rangle_{H(\Omega)} > 0$ oricare ar fi $u \in M$, $h \in M^0$, $h \neq 0$;

5° $P(0) = 0$;

În aceste condiții:

a) dacă există o soluție $u^0 \in M^0$ a ecuației (2.3.1), atunci această soluție este unică și ea realizează pe M^0 minimul funcționalei

$$F(u) = \Phi(u) - \langle f, u\rangle_{H(\Omega)}, \tag{2.3.5}$$

unde

$$\Phi(u) = \int_0^1 \langle P(tu), u\rangle_{H(\Omega)}\, dt; \tag{2.3.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) reciproc, dacă există $u^0 \in M^0$ care realizează minimul funcționalei (2.3.5), (2.3.6) pe M^0, atunci u^0 este soluție a ecuației (2.3.1) (și după punctul a) al teoremei, unica soluție în M^0 a ecuației (2.3.1)).

Demonstrație. Să demonstrăm mai întîi că, în condițiile teoremei, dacă ecuația (2.3.1) posedă o soluție în M^0, această soluție este unică.

Fie că ar exista două soluții distincte u_1, u_2 ale ecuației (2.3.1) în M^0. Atunci, cum

$$Pu_1 = Pu_2 = f, \tag{2.3.7}$$

avem, evident,

$$\langle Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)} = 0. \tag{2.3.8}$$

Să considerăm pe de altă parte funcția reală de variabilă reală φ, definită după cum urmează

$$t \xrightarrow{\varphi} \langle P(tu_1 + (1-t)u_2),\ u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)}, \quad t \in [0, 1], \tag{2.3.9}$$

u_1 și u_2 fiind două puncte arbitrare din M^0.

În ipotezele teoremei, φ este derivabilă în orice punct $t \in (0,1)$. Fie, într-adevăr, t arbitrar în $(0,1)$. Avem

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle P(u_2 + (t+\Delta t)(u_1 - u_2)),\ u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)} - \langle P(u_2 + t(u_1 - u_2)),\ u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)}}{\Delta t} =$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(u_2 + t(u_1 - u_2) + (\Delta t)\,(u_1 - u_2)) - P(u_2 + t(u_1 - u_2))}{\Delta t},\ u_1 - u_2 \right\rangle_{H(\Omega)} =$$

$$= \langle (DP)\,(u_2 + t(u_1 - u_2)) \cdot (u_1 - u_2),\ u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)}.$$

Așadar, pentru orice $t \in (0,1)$,

$$\varphi'(t) = \langle (DP)\,(tu_1 + (1-t)\,u_2) \cdot (u_1 - u_2),\ u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)}. \tag{2.3.10}$$

Raționamentul de mai sus arată că φ este de asemenea derivabilă la dreapta în zero respectiv la stînga în punctul $t = 1$.

Avem :

$$\langle Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)} = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \langle (DP)\,(tu_1 + (1-t)\,u_2) \cdot (u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle_{H(\Omega)}\,dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, oricare ar fi $u_1,\ u_2 \in M^0$, avem

$$\langle Pu_1 - Pu_2,\ u_1 - u_2\rangle_{H(\Omega)} =$$

$$= \int_0^1 \langle (DP)\,(tu_1 + (1-t)\,u_2)\cdot(u_1 - u_2),\ u_1 - u_2\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}t. \qquad (2.3.11)$$

În particular, dacă u_1 şi u_2 sînt cele două soluţii presupuse distincte ale ecuaţiei (2.3.1) în M^0, din (2.3.11), ţinînd seama de ipoteza 4°, rezultă

$$\langle Pu_1 - Pu_2,\ u_1 - u_2\rangle_{H(\Omega)} > 0 \qquad (2.3.12)$$

ceea ce contrazice (2.3.8).

Vom dovedi acum că dacă $u^0 \in M^0$ este soluţie a ecuaţiei (2.3.1), atunci u^0 realizează pe M^0 minimul funcţionalei F dată de (2.3.5) şi (2.3.6). Pentru orice $u,\ h \in M^0$, din (2.3.5) rezultă

$$F(u+h) - F(u) = \Phi(u+h) - \Phi(u) - \langle f, h\rangle_{H(\Omega)}. \qquad (2.3.13)$$

Dar (a se vedea explicaţiile date pentru un calcul analog făcut la teorema de potenţialitate a operatorilor diferenţiabili după Gâteaux)

$$\Phi(u+h)-\Phi(u) = \int_0^1 \langle P(tu+th)-P(tu),\ u\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \langle P(tu+th),\ h\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle P(tu+sh),\ u\rangle_{H(\Omega)}\right]\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_0^1 \langle P(tu+th),\ h\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}t,$$

$$\Phi(u+h)-\Phi(u) = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \langle (DP)(tu+sh)\cdot h,\ u\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_0^1 \langle P(tu+th),\ h\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}t. \qquad (2.3.14)$$

Ţinînd seama de ipoteza 3°, avem evaluările succesive :

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \langle (DP)\,(tu+sh)\cdot h,\ u\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \langle (DP)\,(tu+sh)\cdot u,\ h\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P(tu+sh),\ h\rangle_{H(\Omega)}\right]\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{d}s \int_s^1 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P(tu+sh),\ h\rangle_{H(\Omega)}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \langle P(u+sh) - P(su+sh),\ h\rangle_{H(\Omega)}\,\mathrm{d}s$$

astfel că, în definitiv, notînd în această ultimă integrală variabila de integrare cu t, obținem

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \langle (DP)(tu + sh)\cdot h,\, u\rangle_{H(\Omega)}\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^1 \langle P(u + th),\, h\rangle_{H(\Omega)}\, \mathrm{d}t - \int_0^1 \langle P(tu + th),\, h\rangle_{H(\Omega)}\, \mathrm{d}t. \tag{2.3.15}$$

Din (2.3.14) și (2.3.15) rezultă

$$\Phi(u + h) - \Phi(u) = \int_0^1 \langle P\,(u + th),\, h\rangle_{H(\Omega)}\, \mathrm{d}t \tag{2.3.16}$$

iar din (2.3.16) și (2.3.13) rezultă

$$F(u + h) - F(u) = \int_0^1 \langle P(u + th),\, h\rangle_{H(\Omega)}\, \mathrm{d}t - \langle f,\, h\rangle_{H(\Omega)}. \tag{2.3.17}$$

Relația (2.3.17) este adevărată oricare ar fi u, $h \in M^0$. Fie acum $u^0 \in M^0$, soluție a ecuației (2.3.1) deci astfel încît

$$Pu^0 = f$$

și fie h arbitrar în M^0.

Din (2.3.17) rezultă

$$F(u^0 + h) - F(u^0) = \int_0^1 \langle P(u^0 + th) - Pu^0,\, h\rangle_{H(\Omega)}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \langle P(u^0 + th) - Pu^0,\, th\rangle_{H(\Omega)} \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{2.3.18}$$

Aplicînd formula (2.3.11), din (2.3.18) rezultă

$$F(u^0 + h) - F(u^0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_0^1 \langle (DP)(u^0 + sth)\cdot (th),\, th\rangle_{H(\Omega)}\, \mathrm{d}s. \tag{2.3.19}$$

Ținînd seama de ipoteza 4°, din (2.3.19) rezultă că pentru orice $h \neq 0$, $h \in M^0$, avem

$$F(u^0 + h) - F(u^0) > 0. \tag{2.3.20}$$

Fie u arbitrar în M^0, $u \neq u^0$. Punînd în (2.3.20) $h = u - u^0$, avem

$$F(u) > F(u^0)$$

care arată că u^0 realizează minimul lui F pe M^0.

b) Fie că există $u^0 \in M^0$ care realizează pe M^0 minimul funcţionalei (2.3.5), (2.3.6). Vom dovedi că, atunci, u^0 este soluţie pentru ecuaţia (2.3.1) iar în virtutea celor arătate la punctul a) al teoremei, este unica soluţie în M^0 a ecuaţiei (2.3.1).

Vom începe prin a dovedi că în ipotezele teoremei lui Langenbach, funcţionala F dată de (2.3.5), (2.3.6) este derivabilă după Gâteaux în orice punct $u \in M^0$, după orice direcţie $h \in M^0$ şi că avem

$$F'(u) \cdot h = \langle Pu - f, h \rangle_{H(\Omega)}. \tag{2.3.21}$$

Într-adevăr, din (2.3.17) rezultă

$$F(u + sh) - F(u) = \int_0^1 \langle P(u + tsh), sh \rangle_{H(\Omega)} \, dt - \langle f, sh \rangle_{H(\Omega)},$$

de unde

$$\lim_{s \to 0} \frac{F(u + sh) - F(u)}{s} = \lim_{s \to 0} \int_0^1 \langle P(u + tsh), h \rangle_{H(\Omega)} \, dt - \langle f, h \rangle_{H(\Omega)}. \tag{2.3.22}$$

Dar P este diferenţiabil după Gâteaux pe M^0, prin urmare continuu în u după direcţia h (a se vedea lema 1.3.1.1). De aceea, trecînd la limită cu $s \to 0$ în (2.3.22) se obţine relaţia (2.3.21).

A doua idee a demonstraţiei punctului b) din teorema lui Langenbach este următoarea:

dacă $u^0 \in M^0$ realizează pe M^0 minimul funcţionalei F, atunci, oricare ar fi $h \in M^0$, avem

$$F'(u^0) \cdot h = 0. \tag{2.3.23}$$

Fie, într-adevăr, h arbitrar în M^0 şi a un număr real şi pozitiv. Cum M^0 este subspaţiu al lui $H(\Omega)$, $u^0 + th \in M$, oricare ar fi $t \in [-a, a]$. Pe de altă parte, prin ipoteză, u^0 realizează minimul lui F pe M^0, prin urmare, pentru orice $t \in [-a, a]$, avem

$$F(u^0 + th) \geqslant F(u^0). \tag{2.3.24}$$

Fie funcţia numerică

$$t \xrightarrow{\varphi} F(u^0 + th), \qquad t \in [-a, a].$$

Condiția (2.3.24) se scrie

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(0), \qquad t \in [-a, a].$$

Așadar, dacă $\varphi'(0)$ există, atunci cu necesitate

$$\varphi'(0) = 0. \tag{2.3.25}$$

Calcule simple arată că ținînd seama de definiția lui φ și de faptul demonstrat anterior că F este diferențiabilă în orice punct din M^0 după orice direcție $h \in M^0$, $\varphi'(0)$ există și avem

$$\varphi'(0) = F'(u^0) \cdot h. \tag{2.3.26}$$

Din (2.3.25) și (2.3.26) rezultă

$$F'(u^0) \cdot h = 0 \tag{2.3.27}$$

iar din (2.3.21) și (2.3.27) rezultă

$$\langle Pu^0 - f, h \rangle_{H(\Omega)} = 0, \qquad h \in M^0. \tag{2.3.28}$$

Cum prin ipoteză M^0 este densă în $H(\Omega)$, din (2.3.28) rezultă

$$Pu^0 - f = 0$$

și teorema este demonstrată.

În legătură cu această teoremă vom face următoarele observații:

O_1. Condiția $P(0) = 0$, pretinsă prin ipoteza 5°, nu a intervenit în demonstrație. Ea va interveni mai tîrziu în decursul demonstrației altei teoreme, ce întărește rezultatele teoremei lui Langenbach (vezi teorema 2.3.3). De altfel această condiție nu este esențială: ea poate fi totdeauna presupusă satisfăcută.

Într-adevăr, dacă

$$P(0) = w, \qquad w \neq 0,$$

atunci operatorul

$$P_w u = Pu - w$$

satisface evident condiția $P_w(0) = 0$, și satisface toate celelalte condiții 1°—4° pretinse de teorema lui Langenbach dacă P le satisface. Este suficient pentru aceasta să observăm că toate condițiile 1°—4°

sînt impuse diferenţialei după Gâteaux a operatorului P şi că avem

$$(DP_w)(u)\cdot h = (DP)(u)\cdot h, \qquad u \in M, \qquad h \in M.$$

O_2. Teorema lui Langenbach extinde în mod natural o cunoscută teoremă variaţională pentru operatori liniari şi pozitivi pe spaţii hilbertiene.

Să presupunem, într-adevăr, că P este liniar.

Atunci, cum

$$(DP)(u)\cdot h = Ph, \qquad u, h \in M$$

teorema lui Langenbach devine:

TEOREMA 2.3.2. *Fie $H(\Omega)$ un spaţiu hilbertian real şi P un operator liniar*

$$P : M \to H(\Omega), \qquad M \subset H(\Omega).$$

Fie M^0 mulţimea punctelor din M care satisfac condiţiile la limită (2.3.2).

Fie că:

1) *M^0, M sînt mulţimi liniare, M^0 este densă în $H(\Omega)$;*

2) *pentru orice $h_1, h_2 \in M^0$,*

$$\langle Ph_1, h_2\rangle_{H(\Omega)} = \langle Ph_2, h_1\rangle_{H(\Omega)}; \tag{2.3.29}$$

3) *pentru orice $h \in M^0$, $h \neq 0$, avem*

$$\langle Ph, h\rangle_{H(\Omega)} > 0. \tag{2.3.30}$$

În aceste condiţii:

a) *dacă există soluţie $u^0 \in M^0$ a ecuaţiei $Pu = f$, această soluţie este unică şi ea realizează pe M^0 minimul funcţionalei*

$$F(u) = \Phi(u) - \langle f, u\rangle_{H(\Omega)}, \tag{2.3.31}$$

unde

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle Pu, u\rangle_{H(\Omega)}; \tag{2.3.32}$$

b) *reciproc, elementul mulţimii M^0 care realizează minimul funcţionalei* (2.3.31) *pe M^0, satisface ecuaţia $Pu = f$.*

Să facem o remarcă cu privire la demonstraţia directă ce se dă acestei teoreme (a se vedea de exemplu Mihlin, [47 a]).

Scanned with OKEN Scanner

Prima parte a acestei teoreme are următoarea demonstrație: dacă $u^0 \in M^0$ și $Pu^0 = f$, atunci

$$F(u) = \frac{1}{2}\langle Pu, u\rangle_{H(\Omega)} - \langle f, u\rangle_{H(\Omega)} = \frac{1}{2}\langle Pu, u\rangle_{H(\Omega)} - \langle Pu_0, u\rangle_{H(\Omega)} =$$

$$= \frac{1}{2}[\langle Pu, u\rangle_{H(\Omega)} - 2\langle Pu_0, u\rangle_{H(\Omega)}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\langle Pu, u\rangle_{H(\Omega)} - \langle Pu_0, u\rangle_{H(\Omega)} - \langle Pu, u_0\rangle_{H(\Omega)}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\langle Pu - Pu_0, u - u_0\rangle_{H(\Omega)} - \langle Pu_0, u_0\rangle_{H(\Omega)}]$$

așadar

$$F(u) = \frac{1}{2}[\langle Pu - Pu_0, u - u_0\rangle_{H(\Omega)} - \langle Pu_0 u_0\rangle_{H(\Omega)}] \qquad (2.3.33)$$

și ținînd seama că pentru orice $u \neq u^0$, din (2.3.30) urmează

$$\langle Pu - Pu_0, u - u_0\rangle_{H(\Omega)} = \langle P(u - u_0), u - u_0\rangle_{H(\Omega)} > 0. \qquad (2.3.34)$$

Rezultă din (2.3.33) că minimul lui F se atinge pe M^0 pentru $u = u_0$ și el este

$$\inf_{u \in M^0} F(u) = F(u^0) = -\frac{1}{2}\langle Pu^0, u^0\rangle_{H(\Omega)}.$$

Să observăm că, odată scrisă $F(u)$ sub forma (2.3.33), tragerea concluziei că u^0 este punctul ce realizează minimul lui F pe M^0, este o consecință a faptului că pentru orice $u \in M^0$, $u \neq u^0$,

$$\langle Pu - Pu^0, u - u^0\rangle_{H(\Omega)} > 0.$$

Punerea funcționalei în orice punct $u \in M^0$ sub forma (2.3.33) a necesitat însă utilizarea simetriei operatorului P.

O_3. Forma funcționalei (2.3.6) ca și ideea de demonstrare a teoremei lui Langenbach sînt în mod evident sugerate de teorema de potențialitate 1.3.1.1.

O_4. În sfîrșit, să observăm că teorema lui Langenbach cere fie existența soluției ecuației (2.3.1) în M^0 și atunci afirmă că această soluție

este unică şi că ea realizează pe M^0 minimul funcţionalei (2.3.5), fie existenţa unui punct $u^0 \in M^0$, care să realizeze minimul funcţionalei (2.3.5) pe M^0 şi atunci afirmă că u^0 este soluţie a ecuaţiei (2.3.1).

Dacă ar rămîne la acest stadiu, teorema n-ar fi interesantă din punct de vedere al abordării efective a ecuaţiei (2.3.1) cu condiţiile la frontieră (2.3.2).

De aceea, punctul de vedere ce va fi urmărit în mod consecvent în continuare va fi următorul : să întărim condiţiile teoremei lui Langenbach astfel încît punctul b) al teoremei lui Langenbach să nu mai înceapă cu : „dacă există $u^0 \in M^0$ care realizează minimul funcţionalei (2.3.5), (2.3.6), atunci u^0 este soluţie a ecuaţiei (2.3.1)" ci cu „în aceste condiţii există un punct $u^0 \in M^0$ care realizează minimul funcţionalei (2.3.5), (2.3.6)". Odată obţinut un asemenea rezultat, raţionamentul decurge astfel : odată demonstrată existenţa unui punct $u^0 \in M^0$ care realizează pe M^0 minimul funcţionalei (2.3.5), (2.3.6), în conformitate cu punctul b) al teoremei lui Langenbach, u^0 este soluţie a ecuaţiei (2.3.1) iar după punctul a) al teoremei lui Langenbach, este unica soluţie din M^0 a ecuaţiei (2.3.1).

Aşadar întărirea condiţiilor teoremei lui Langenbach astfel încît să poată fi demonstrată existenţa şi unicitatea unui punct de minim pe M^0 pentru funcţionala (2.3.5), (2.3.6) cuplată cu teorema lui Langenbach, echivalează cu o teoremă de existenţă şi unicitate pentru problema (2.3.1), (2.3.2).

Aşadar, odată obţinută existenţa unui punct de minim pe M^0 pentru funcţionala (2.3.5), (2.3.6), în loc să ne preocupăm de a găsi soluţia problemei (2.3.1), (2.3.2) este suficient să ne preocupăm de construirea acestui punct de minim (se va vedea cum se pot întări condiţiile teoremei lui Langenbach pentru ca acest punct să fie şi unic). Bineînţeles este de preferat să se dea metode efective (numerice) de construire a acestui punct, ceea ce, conform celor de mai sus, ar echivala cu o construcţie efectivă a soluţiei a cărei existenţă şi unicitate a fost anterior demonstrată.

Realizarea acestui drum este destul de dificilă. Ea începe cu teorema următoare, datorată de asemenea lui Langenbach [42 e] şi se termină cu teoremele de regularizare şi cu dezvoltarea unor metode de tip Ritz pentru funcţionale ataşate unor probleme de tipul (2.3.1), (2.3.2) prin teorema variaţională a lui Langenbach.

TEOREMA 2.3.3. *Dacă în teorema variaţională a lui Langenbach condiţia* 4^0 *este înlocuită cu condiţia mai tare :*

există o constantă $\gamma^2 > 0$ *astfel încît pentru orice* $u \in M$ *şi* $h \in M^0$ *să avem*

$$\langle (DP)(u) \cdot h, h \rangle_{H(\Omega)} \geqslant \gamma^2 \| h \|^2_{H(\Omega)}, \tag{2.3.35}$$

atunci :

a) *funcţionala F definită de* (2.3.5), (2.3.6) *este mărginită inferior pe* M^0 ;

b) *funcţionala F definită de* (2.3.5), (2.3.6) *este strict convexă pe* M^0 ;

c) *orice șir minimizant al funcționalei F definită de* (2.3.5), (2.3.6) *are limită în* $H(\Omega)$;

Demonstrație. a) Într-adevăr, din (2.3.5), (2.3.6) rezultă că pentru orice $u \in M^0$ avem

$$F(u) = \int_0^1 \langle P(tu), u\rangle_{H(\Omega)}\, dt - \langle f, u\rangle_{H(\Omega)} =$$

$$= \int_0^1 \langle P(tu), tu\rangle_{H(\Omega)} \frac{dt}{t} - \langle f, u\rangle_{H(\Omega)} =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\frac{d}{ds}\langle P(stu), tu\rangle_{H(\Omega)}\right) ds\right] \frac{dt}{t} - \langle f, u\rangle_{H(\Omega)}, \quad (2.3.36)$$

în obținerea acestei reprezentări ținîndu-se seama atît de ipoteza 5° din teorema variațională a lui Langenbach, cît și de faptul că funcția reală de variabilă reală φ,

$$s \xrightarrow{\varphi} \langle P(stu), tu\rangle_{H(\Omega)}, \quad s \in [0,1],$$

este derivabilă în orice punct s al intervalului $(0,1)$ și avem

$$\frac{d}{ds}\langle P(stu), tu\rangle_{H(\Omega)} = \langle (DP)(stu).(tu), tu\rangle_{H(\Omega)}. \quad (2.3.37)$$

Ținînd seama de (2.3.37), din (2.3.36) rezultă

$$F(u) = \int_0^1 \left[\int_0^1 \langle (DP)(stu).(tu), tu\rangle_{H(\Omega)}\, ds\right] \frac{dt}{t} - \langle f, u\rangle_{H(\Omega)}. \quad (2.3.38)$$

Ținînd seama de (2.3.35) și utilizînd inegalitatea Cauchy—Schwarz, din (2.3.38) rezultă

$$F(u) \geqslant \int_0^1 \left[\int_0^1 \gamma^2 \|tu\|^2_{H(\Omega)}\, ds\right] \frac{dt}{t} - |\langle f, u\rangle_{H(\Omega)}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\gamma^2}{2}\|u\|^2_{H(\Omega)} - \|f\|_{H(\Omega)}\|u\|_{H(\Omega)} \geqslant -\frac{1}{2\gamma^2}\|f\|^2_{H(\Omega)},$$

așadar există o constantă $C = -\dfrac{\|f\|^2_{H(\Omega)}}{2\gamma^2}$ astfel încît mulțimea valorilor funcționalei F pe M^0 este mărginită inferior de această constantă

$$C \leqslant F(u), \quad u \in M^0, \quad (2.3.38)'$$

deci F este mărginită inferior pe M^0.

b) A demonstra că F este strict convexă pe M^0, înseamnă să demonstrăm că pentru orice două puncte $u,\ v\in M^0$, $u\neq v$, avem

$$F(u)+F(v)-2F\left(\frac{u+v}{2}\right)>0. \tag{2.3.39}$$

(În legătură cu noţiunea de strict convexitate pentru funcţionale a se vedea 6.2, unde este analizată noţiunea de strict convexitate pentru funcţii reale de variabilă reală dar cu rezultate care clarifică în acelaşi timp noţiunea şi pentru funcţionale).

Ţinînd seama de (2.3.5), (2.3.6), a demonstra (2.3.39) revine la a demonstra că

$$\Phi(u)+\Phi(v)-2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)>0, \tag{2.3.40}$$

pentru orice $u,\ v\in M^0$, $u\neq v$.

Avem, oricare ar fi $u,\ u+h\in M^0$:

$$\Phi(u+h)+\Phi(u)-2\Phi\left(\frac{(u+h)+u}{2}\right)=\Phi(u+h)+\Phi(u)-2\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)=$$

$$=\left[\Phi(u+h)-\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)\right]-\left[\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)-\Phi(u)\right].$$

Evaluînd cele două paranteze drepte în conformitate cu formula (2.3.16), se obţine

$$\Phi(u+h)+\Phi(u)-2\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)=$$

$$=\int_0^1\left\langle P\left(u+\frac{h}{2}+s\frac{h}{2}\right),\ \frac{h}{2}\right\rangle_{H(\Omega)}\mathrm{d}s-\int_0^1\left\langle P\left(u+s\frac{h}{2}\right),\ \frac{h}{2}\right\rangle_{H(\Omega)}\mathrm{d}s=$$

$$=\int_0^1\left\langle P\left(u+s\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-P\left(u+s\frac{h}{2}\right),\ \frac{h}{2}\right\rangle_{H(\Omega)}\mathrm{d}s.$$

Ţinînd seama de formula (2.3.11), egalitatea

$$\Phi(u+h)+\Phi(u)-2\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)=\int_0^1\left\langle P\left(u+s\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-P\left(u+s\frac{h}{2}\right),\ \frac{h}{2}\right\rangle_{H(\Omega)}\mathrm{d}s$$

obținută mai sus, poate fi pusă sub forma

$$\Phi(u+h)+\Phi(u)-2\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)= \tag{2.3.41}$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\left\langle (DP)\left(u+s\frac{h}{2}+t\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{h}{2},\ \frac{h}{2}\right\rangle_{H(\Omega)}dt\right]ds$$

Din (2.3.35) și (2.3.41) rezultă acum

$$\Phi(u+h)+\Phi(u)-2\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)\geqslant\frac{\gamma^2}{4}\|h\|^2_{H(\Omega)}. \tag{2.3.42}$$

Din (2.3.42), pentru $h=v-u\neq 0$, se obține

$$\Phi(u)+\Phi(v)-2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\geqslant\frac{\gamma^2}{4}\|u-v\|^2_{H(\Omega)}>0 \tag{2.3.43}$$

c) Din (2.3.38′) rezultă că există

$$d=\inf_{u\in M^0}F(u)=\inf\{F(u)/u\in M^0\}. \tag{2.3.44}$$

DEFINIȚIA 2.3.1. Se numește *șir minimizant* pentru funcționala (2.3.5), (2.3.6) pe mulțimea M^0, un șir u_n, $n\in N$, de elemente din M^0 cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty}F(u_n)=d. \tag{2.3.45}$$

Existența unui asemenea șir pentru funcționala F pe M^0 rezultă din proprietatea lui F de a fi mărginită inferior pe M^0 (a se vedea (2.3.38′)) și din proprietatea marginii inferioare a unei mulțimi de numere reale care afirmă existența unui șir de puncte din această mulțime de numere reale convergent la marginea inferioară a mulțimii, în ipoteza că această margine există.

Fie u_n, $n\in N$, un șir minimizant pentru funcționala F pe M^0. După (2.3.43), pentru orice $n\in N$, $m\in N$, avem

$$\frac{\gamma^2}{4}\|u_m-u_n\|^2_{H(\Omega)}\leqslant\Phi(u_m)+\Phi(u_n)-2\Phi\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right)=$$

$$=F(u_m)+F(u_n)-2F\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right). \tag{2.3.46}$$

Cum

$$F\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right)\geqslant d$$

avem, evident,

$$F(u_m) + F(u_n) - 2F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) \leqslant F(u_m) + F(u_n) - 2d = \\ = [F(u_m) - d] + [F(u_n) - d]. \tag{2.3.47}$$

Cum u_n, $n \in N$, este un şir minimizant pentru funcţionala F pe M^0, din (2.3.45) rezultă existenţa unui rang n_0 astfel încît oricare ar fi $m \in N$, $n \in N$, $m > n_0$, $n > n_0$, avem

$$F(u_m) - d < \varepsilon^2 \frac{\gamma^2}{8}, \quad F(u_n) - d < \varepsilon^2 \frac{\gamma^2}{8}. \tag{2.3.48}$$

Din (2.3.47) şi (2.3.48) rezultă că pentru orice m, n naturali şi depăşind pe n_0, avem

$$F(u_m) + F(u_n) - 2F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) < \varepsilon^2 \frac{\gamma^2}{4} \tag{2.3.49}$$

iar din (2.3.46) şi (2.3.49) rezultă că pentru $m > n_0$, $n > n_0$ avem

$$\| u_m - u_n \|_{H(\Omega)} < \varepsilon$$

care arată că şirul minimizant u_n este şir Cauchy al spaţiului hilbertian $H(\Omega)$ şi deci are limită în $H(\Omega)$.

DEFINIŢIA 2.3.2. Se numeşte *soluţie generalizată în sens Sobolev a problemei* (2.3.1), (2.3.2), limita oricărui şir minimizant pe M^0 al funcţionalei F dată de (2.3.5), (2.3.6).

TEOREMA 2.3.4. *Soluţia generalizată a problemei* (2.3.1), (2.3.2) *este unică.*

Demonstraţie. Ţinînd seama de definiţia pusă mai sus pentru soluţia generalizată în sens Sobolev a problemei (2.3.1), (2.3.2), demonstrarea unicităţii acestei soluţii pentru problema (2.3.1), (2.3.2), revine la a demonstra că toate şirurile minimizante pe M^0 ale funcţionalei (2.3.5), (2.3.6) au aceeaşi limită în $H(\Omega)$. Fie, într-adevăr, u_n şi v_n, $n \in N$, două şiruri minimizante pe M^0 ale funcţionalei F. În conformitate cu punctul c) al teoremei (2.3.3), fiecare din aceste şiruri are limită în $H(\Omega)$. Dar din faptul că u_n şi v_n, $n \in N$, sînt şiruri minimizante, rezultă, evident, că şi şirul

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n, \cdots \tag{2.3.50}$$

este un şir minimizant pe M^0 pentru funcţionala F.

În conformitate cu punctul c) al teoremei (2.3.3), şirul

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n, \cdots$$

are limită în $H(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că șirurile

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

și

$$v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$$

ca subșiruri convergente ale șirului convergent (2.3.50), au aceeași limită în $H(\Omega)$ și teorema este demonstrată.

Să remarcăm următoarele:

O_1. În timp ce teorema variațională a lui Langenbach furniza unicitatea soluției în sens clasic pentru problema (2.3.1), (2.3.2), (a se vedea punctul a) al teoremei lui Langenbach), teoremele (2.3.3), (2.3.4) furnizează pentru soluția generalizată în sens Sobolev a problemei (2.3.1), (2.3.2), atît existența cît și unicitatea acestei soluții.

O_2. Soluția generalizată în sens Sobolev pentru problema (2.3.1), (2.3.2) este limita în $H(\Omega)$ a unui șir Cauchy de puncte din $M^0 \subset H(\Omega)$, așadar, în general nu este în M^0. În virtutea ipotezei de densitate a lui M^0 în $H(\Omega)$, există însă șiruri din M^0 convergente în norma lui $H(\Omega)$ la soluția generalizată în sens Sobolev a problemei (2.3.1), (2.3.2).

O_3. Observația de mai sus conduce în mod natural la întrebarea: dar dacă reușim să demonstrăm că soluția generalizată după Sobolev a problemei (2.3.1), (2.3.2) este chiar în M^0, rezultă atunci că ea este chiar soluția clasică a problemei (2.3.1), (2.3.2)? Un răspuns afirmativ la această întrebare ar justifica preocuparea de a da condiții suficiente pentru ca soluția generalizată după Sobolev a problemei (2.3.1), (2.3.2) să fie din M^0. Am ști atunci că soluția generalizată după Sobolev a problemei (2.3.1), (2.3.2) este chiar soluția clasică a acestei probleme și că ea este limita oricărui șir minimizant al funcționalei F pe M^0, prin urmare poate fi construită cu aproximație oricît de bună dacă știm să construim termeni de rang suficient de mare pentru șirurile minimizante pe M^0 ale funcționalei F. Se ajunge astfel în mod natural la dezvoltarea unor metode numerice de construire a șirurilor minimizante pe M^0 pentru funcționala F. Pe cazurile concrete pe care le vom analiza, demonstrarea apartenenței soluției generalizate după Sobolev la M^0, va însemna să demonstrăm că această soluție posedă toate proprietățile de regularitate care s-o plaseze în domeniul de definiție al operatorului P (deci necesitatea unor teoreme de regularizare) și că satisface condițiile la frontieră ale problemei respective.

O_4. În sfîrșit, menționăm că răspunsul la chestiunea pusă odată cu observația a treia este afirmativ: dacă soluția generalizată a problemei (2.3.1), (2.3.2) este în M^0, atunci ea este soluție clasică a problemei (2.3.1), (2.3.2).

Demonstrarea acestui fapt necesită însă o adaptare a teoremei (2.1.2). Într-adevăr, am demonstrat că în orice punct $u \in M^0$ și după orice direcție $h \in M^0$, avem (a se vedea (2.3.21))

$$(DF)(u) \cdot h = \langle Pu - f, h \rangle_{H(\Omega)} = F'(u) \cdot h = \langle F'(u), h \rangle_{H(\Omega)}. \quad (2.3.50)$$

Fie $g \in M^0$. Din (2.3.50) rezultă

$$\langle F''(u)\cdot g, h\rangle_{H(\Omega)} = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{F'(u+tg)-F'(u)}{t}, h \right\rangle_{H(\Omega)} =$$

$$= \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{P(u+tg)-P(u)}{t}, h \right\rangle_{H(\Omega)} = \langle (DP)(u)\cdot g, h\rangle_{H(\Omega)}, \tag{2.3.51}$$

astfel că, ţinînd seama de (2.3.35), pentru orice $u, h \in M^0$, rezultă

$$\langle F''(u)\cdot h, h\rangle_{H(\Omega)} = \langle (DP)(u)\cdot h, h\rangle_{H(\Omega)} \geqslant \gamma^2 \|h\|^2_{H(\Omega)} \geqslant 0. \tag{2.3.52}$$

Din această ultimă inegalitate, exact cu demonstraţia din teorema (2.1.3), se obţine că, pentru orice $u, v \in M^0$, avem

$$F(u) - F(v) - F'(v)\cdot(u-v) \geqslant 0 \tag{2.3.53}$$

Fie acum că soluţia în sens Sobolev a problemei (2.3.1), (2.3.2) este în M^0, cu alte cuvinte, fie că limita oricărui şir minimizant pe M^0 pentru funcţionala F aparţine lui M^0.

Fie u_n un şir minimizant pentru F pe M^0 şi fie

$$u^0 = \lim_{n\to\infty} u_n. \tag{2.3.54}$$

Din (2.3.53) rezultă

$$F(u_n) - F(u^0) - F'(u^0)\cdot(u_n - u^0) \geqslant 0.$$

Trecînd la limită cu $n \to \infty$ în această ultimă inegalitate şi ţinînd seama că

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = d = \inf_{u\in M^0} F(u),$$

se obţine

$$d \geqslant F(u^0),$$

care alăturată inegalităţii evidente

$$F(u^0) \leqslant d,$$

dă

$$F(u^0) = d = \inf_{u\in M^0} F(u).$$

Așadar, $u^0 \in M^0$ realizează pe M^0 minimul funcționalei F, și atunci, în conformitate cu punctul b) al teoremei lui Langenbach, u^0 satisface ecuația (2.3.1), deci este soluție a problemei (2.3.1), (2.3.2). În conformitate cu punctul a) al teoremei lui Langenbach, u^0 este unica soluție a problemei (2.3.1), (2.3.2).

§ 2.4. Extinderi ale teoremei lui Langenbach

Teorema lui Langenbach a fost extinsă în două direcții remarcabile.

Prima dintre direcții este ilustrată de lucrările lui Mihlin și constă în enunțarea teoremei lui Langenbach pentru operatori diferențiabili care sînt gradienți de funcționale pe spații Banach (reamintim că teorema lui Langenbach a fost demonstrată numai în cadrul spațiilor hilbertiene).

A doua direcție este ilustrată de lucrările lui Langenbach însuși și constă în enunțarea unei teoreme de același tip cu teorema lui Langenbach pe care am demonstrat-o inițial, dar în care diferențialele după Gâteaux nu mai sînt considerate în sensul normei, ci în sens slab. Firește, această presupunere îngreuiază demonstrațiile. Teorema nu poate fi transpusă automat. Dar presupunerea că operatorii sînt doar slab diferențiabili după Gâteaux permite traducerea în teoreme variaționale de tipul teoremei lui Langenbach a unor principii ale mecanicii ca de exemplu cel al lucrului virtual.

Iată cadrul în care vom da rezultatele ce vor ilustra prima direcție în care a fost extinsă teorema lui Langenbach (vezi [47 b]).

Se va considera că funcționala Φ este definită pe o mulțime liniară $\mathcal{D}(\Phi)$ densă într-un spațiu Banach real și reflexiv X. Se va presupune că Φ are derivată după Gâteaux în orice punct $u \in \mathcal{D}(\Phi)$, continuă cu u în orice hiperplan bidimensional ce trece prin u.

Fie $P = \operatorname{grad} \Phi$. Presupunem că domeniul de definiție al lui P, $\mathcal{D}(P)$ este de asemenea o mulțime liniară și densă în X. Presupunem că P este diferențiabil cu diferențială după Gâteaux liniară în orice punct $u \in \mathcal{D}(P)$ și că operatorul $(DP)(u)$ este definit pe mulțimea liniară $\mathcal{D}((DP)(u))$ de asemenea densă în X. Fie f un element fixat în X^* și fie funcționala F definită pe $\mathcal{D}(\Phi)$ după cum urmează

$$u \in \mathcal{D}(\Phi),\ u \xrightarrow{F} F(u) = \Phi(u) - \langle f, u \rangle. \tag{2.4.1}$$

TEOREMA 2.4.1. *Dacă elementul u_0 realizează un minim relativ pentru funcționala* (2.4.1), *atunci* $u_0 \in \mathcal{D}(P)$ *și*

$$Pu_0 = f. \tag{2.4.2}$$

Demonstrație. Dacă u_0 realizează un minim relativ pentru F, atunci, în conformitate cu teorema 2.2.5, urmează că, pentru orice $h \in \mathcal{D}(\Phi)$, avem

$$(VF)(x_0)\cdot h = \lim_{t\to 0} \frac{F(u_0+th)-F(u_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u_0+th)|_{t=0} = \tag{2.4.3}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(u_0+th)|_{t=0} - \langle f, h\rangle = 0,$$

de unde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(u_0+th)|_{t=0} = (V\Phi)(u_0)\cdot h = \langle f, h\rangle. \tag{2.4.4}$$

În membrul drept al egalității (2.4.4) avînd valoarea în h a unei funcționale liniare și mărginite pe X, din definiția gradientului lui Φ rezultă că

$$(\operatorname{grad}\Phi)(u_0)\cdot h = \langle Pu_0, h\rangle = \langle f, h\rangle,\ h\in\mathcal{D}(\Phi),\ \overline{\mathcal{D}(\Phi)} = X,$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 2.4.2. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și fie funcționala Φ și gradientul ei P definite pe mulțimile liniare $\mathcal{D}(\Phi)$ și respectiv $\mathcal{D}(P)$, $\mathcal{D}(P)\subset\mathcal{D}(\Phi)$, dense în X. Fie că P posedă diferențială după Gâteaux liniară $(DP)(u)\cdot h$ în orice punct $u\in\mathcal{D}(P)$, continuă cu u în orice hiperplan bidimensional ce trece prin u. Fie că operatorul $(DP)(u)$ este pozitiv și că pentru orice $u\in\mathcal{D}(P)$, $\mathcal{D}((DP)(u))\supset\mathcal{D}(P)$.*

În aceste condiții:

a) *dacă ecuația*

$$Pu = f$$

are soluție, fie ea u_0, atunci această soluție este unică și

$$F(u_0) = \min_{u\in\mathcal{D}(P)} F(u), \tag{2.4.6}$$

unde F este funcționala definită de (2.4.1);

b) *dacă, în plus, funcționala F este semicontinuă superior, atunci u_0 realizează minimul lui F chiar pe $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(\Phi)$,*

$$F(u_0) = \min_{u\in\mathcal{D}(\Phi)} F(u). \tag{2.4.7}$$

Demonstrație. Punctul a) al teoremei are exact aceeași demonstrație ca în cazul teoremei 2.3.1, cu deosebirea că produsele scalare din demonstrația teoremei 2.3.1 trebuie înțelese acum ca valori de funcționale din X^* în puncte din X.

Scanned with OKEN Scanner

De aceea vom trece la demonstrarea punctului b) al teoremei. Prin ipoteză, F este semicontinuă superior, lucru de care dacă se ține seama în (2.4.1), în care $f \in X^*$, rezultă că Φ este semicontinuă superior. Invers, este suficient ca Φ să fie semicontinuă superior pentru ca din (2.4.1) să rezulte același lucru pentru F.

Fie că u_0 n-ar realiza minimul lui F pe $\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{D}(F)$. Ar exista atunci $u_1 \in \mathcal{D}(\Phi)$ astfel încît

$$F(u_1) < F(u_0). \tag{2.4.8}$$

Fie

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[F(u_0) - F(u_1)]. \tag{2.4.9}$$

Cum F este semicontinuă superior, pentru ε dat de (2.4.9) există $\delta > 0$, astfel încît oricare ar fi $v \in \mathcal{D}(\Phi)$ cu $\|u_1 - v\| < \delta$, avem

$$F(u_1) - F(v) > -\varepsilon. \tag{2.4.10}$$

Cum însă $\mathcal{D}(P)$ este dens în X, pentru $\delta > 0$ furnizat de definiția semicontinuității superioare corespunzătoare lui ε dat de (2.4.9), există $w \in \mathcal{D}(P)$, astfel încît $\|u_1 - w\| < \delta$. Pentru acest w, avem deci

$$F(u_1) - F(w) > -\frac{1}{2}[F(u_0) - F(u_1)],$$

de unde

$$F(w) < \frac{1}{2}[F(u_0) + F(u_1)] < F(u_0).$$

Așadar, există $w \in \mathcal{D}(P)$ astfel încît

$$F(w) < F(u_0)$$

contradicție, căci aceasta ar însemna că u_0 nu realizează nici măcar minimul lui F pe $\mathcal{D}(P)$ în timp ce punctul a) al teoremei afirmă contrariul.

Punctul b) al acestei teoreme reprezintă contribuția lui Mihlin.

TEOREMA 2.4.3. *Fie X un spațiu Banach real și reflexiv și fie că funcționala Φ și gradientul ei P sînt definite pe mulțimile liniare $\mathcal{D}(\Phi)$ respectiv $\mathcal{D}(P)$, $\mathcal{D}(P) \subset \mathcal{D}(\Phi)$, dense în X.*

a) *Dacă operatorul $P = \operatorname{grad} \Phi$ are diferențială după Gâteaux liniară și pozitivă în orice punct $u \in \mathcal{D}(P)$ și $\mathcal{D}((DP)(u)) \supset \mathcal{D}(P)$, atunci funcționala Φ este strict convexă pe $\mathcal{D}(P)$.*

b) *Dacă în afara presupunerilor de la punctul a) se mai presupune că Φ este continuă, atunci Φ este convexă pe $\mathcal{D}(\Phi)$.*

c) *Dacă în plus față de cea ce se presupune la punctele a) și b) avem*

$$\langle (DP)(u)\cdot h,\ h\rangle \geqslant \gamma^2 \|h\|^2, \tag{2.4.11}$$

atunci Φ *este strict convexă pe* $\mathcal{D}(\Phi)$.

Demonstrație. Punctul a) al teoremei 4.2.3 corespunde punctului b) din teorema lui Langenbach corespunzătoare spațiilor hilbertiene și are aceeași demonstrație ca acesta din urmă, cu aceeași remarcă pe care am făcut-o privind demonstrația punctului a) al teoremei 4.2.2.

b) În ipotezele de la punctul a) la care se adaugă cea a continuității lui Φ, vom demonstra că, oricare ar fi $u,\ v\in\mathcal{D}(\Phi)$, avem

$$\Phi(u)+\Phi(v)-2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\geqslant 0. \tag{2.4.12}$$

Să presupunem că n-ar fi astfel, deci că ar exista $u_0,\ v_0\in\mathcal{D}(\Phi)$ pentru care

$$\Phi(u_0)+\Phi(v_0)-2\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right)<0. \tag{2.4.13}$$

Evident, trebuie presupus $u_0\neq v_0$, căci dacă $u_0=v_0$, atunci

$$\Phi(u_0)+\Phi(v_0)-2\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right)=0.$$

Fie $-k<0$ astfel încît

$$\Phi(u_0)+\Phi(v_0)-2\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right)\leqslant -k<0 \tag{2.4.14}$$

și fie $\varepsilon=\dfrac{k}{6}$.

Cum prin ipoteză Φ este continuă pe $\mathcal{D}(\Phi)$, pentru $\varepsilon=\dfrac{k}{6}>0$

există $\delta>0$ astfel încît oricare ar fi $u,\ v\in\mathcal{D}(\Phi)$ cu $\|u-u_0\|<\delta$, $\|v-v_0\|<\delta$ avem

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi(u_0)>\Phi(u)-\varepsilon\\
&\Phi(v_0)>\Phi(v)-\varepsilon\\
&\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right)<\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)+\varepsilon
\end{aligned}\right\}. \tag{2.4.15}$$

Cum însă $\mathcal{D}(P)$ este dens în X, pentru $\delta > 0$ furnizat de definiția continuității lui Φ corespunzătoare lui $\varepsilon = \frac{k}{6}$, există $u, v \in \mathcal{D}(P)$ astfel încît $\|u - u_0\| < \delta$, $\|v - v_0\| < \delta$, deci există $u, v \in \mathcal{D}(P)$ pentru care sînt adevărate inegalitățile (2.4.15). Din (2.4.15) urmează

$$\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) < [\Phi(u_0) + \varepsilon] + [\Phi(v_0) + \varepsilon] -$$

$$-\left[2\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right) - 2\varepsilon\right] \leqslant -k + 4\varepsilon = -\frac{k}{3} < 0$$

cu $u, v \in \mathcal{D}(P)$ ceea ce contrazice faptul că Φ este strict convexă pe $\mathcal{D}(P)$, așa cum se afirmă în punctul a) al teoremei.

c) Să demonstrăm că adăugarea ipotezei de pozitiv definire a operatorului $(DP)(u)$ întărește rezultatul punctului b) al teoremei pînă la stricta convexitate a lui Φ pe $\mathcal{D}(\Phi)$. Să presupunem că Φ n-ar fi strict convexă pe $\mathcal{D}(\Phi)$, deci că ar exista punctele $u_0, v_0 \in \mathcal{D}(\Phi)$, $u_0 \neq v_0$, astfel încît

$$\Phi(u_0) + \Phi(v_0) - 2\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right) \leqslant 0. \tag{2.4.16}$$

Fie $\varepsilon > 0$. În baza continuității lui Φ, există $\delta > 0$, astfel încît, oricare ar fi u, v cu $\|u - u_0\| < \delta$, $\|v - v_0\| < \delta$, avem

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(u_0) > \Phi(u) - \varepsilon \\ &\Phi(v_0) > \Phi(v) - \varepsilon \\ &\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right) < \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) + \varepsilon \end{aligned}\right\}. \tag{2.4.17}$$

Cum însă $\mathcal{D}(P)$ este dens în X, există $u, v \in \mathcal{D}(P)$ astfel încît să avem $\|u - u_0\| < \delta$, $\|v - v_0\| < \delta$, prin urmare pentru care să avem inegalitățile (2.4.17). Evident, se poate totdeauna presupune

$$\delta < \frac{1}{3}\|u_0 - v_0\|, \tag{2.4.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce atrage că distanța între elementele $u, v \in \mathcal{D}(P)$ care satisfac la $\|u - u_0\| < \delta$ și $\|v - v_0\| < \delta$ și deci pentru care sînt adevărate (2.4.17), este

$$\|u - v\| > \frac{1}{3}\|u_0 - v_0\|. \tag{2.4.19}$$

Așadar, există elementele $u, v \in \mathcal{D}(P)$, care satisfac (2.4.19) și pentru care sînt adevărate în același timp (2.4.17).

Dar, din (2.4.17) urmează

$$\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) < [\Phi(u_0) + \varepsilon] + [\Phi(v_0) + \varepsilon] -$$

$$-\left[2\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right) - 2\varepsilon\right] = \Phi(u_0) + \Phi(v_0) - 2\Phi\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right) + 4\varepsilon \leqslant 4\varepsilon \tag{2.4.20}$$

cu ε arbitrar.

Pe de altă parte (vezi demonstrația corespunzătoare din teorema lui Langenbach),

$$\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) \geqslant \frac{\gamma^2}{4}\|u - v\|^2 > \frac{\gamma^2}{36}\|u_0 - v_0\|^2. \tag{2.4.21}$$

Inegalitățile (2.4.20) și (2.4.21) sînt contradictorii.

În sfîrșit, vom încheia această primă parte a § 2.4 cu următoarea teoremă

TEOREMA 2.4.4. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și fie că funcționala Φ și gradientul ei P sînt definite pe mulțimea $\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{D}(P)$ liniară și densă în X. Fie că P posedă diferențială în sens Gâteaux liniară în orice punct $u \in \mathcal{D}(P)$ și că $\mathcal{D}((DP)(u)) \supset \mathcal{D}(P)$. Fie că operatorul $(DP)(u)$ este pozitiv definit, deci că*

$$\langle (DP)(u) \cdot h, h \rangle \geqslant \gamma^2 \|h\|^2. \tag{2.4.22}$$

Fie, de asemenea, că $P(0) = 0$.

Atunci Φ este mărginită inferior și orice șir minimizant al lui Φ este convergent în metrica lui X.

Demonstrația acestei teoreme urmează punct cu punct demonstrația teoremei 2.3.1.

Cu privire la condiția ca P să ducă pe zero în zero se poate face aceeași observație ca la teorema 2.3.1 (vezi observația O_1).

Cea de-a doua direcție în care a fost extinsă teorema lui Langenbach este ilustrată de însuși Langenbach (vezi [42f]). Fie ecuația

$$Pu = f, \tag{2.4.23}$$

unde P este definit de la un spațiu hilbertian real H cu valori în H și duce pe zero în zero.

Vom formula condiții în care P aplică biunivoc H pe H deci în care ecuația (2.4.23) are soluție unică oricare ar fi $f \in H$.

DEFINIȚIA 2.4.1. Se zice că P este slab diferențiabil pe H dacă există un operator $(\mathcal{D}P)$,

$$(\mathcal{D}P) : H \to L(H, H)$$

astfel încît, oricare ar fi $u, g, h \in H$, avem

$$\lim_{t \to 0} \left\langle \frac{P(u + tg) - P(u)}{t} - (\mathcal{D}P)(u) \cdot g, h \right\rangle = 0. \qquad (2.4.24)$$

Fie I intervalul închis $0 \leqslant s \leqslant 1$, $I^2 = I \times I$ etc. Vom nota cu $p_k(s)$, $p_k(s, t)$ etc. $k = 1, 2, \ldots$, funcțiile reale definite pe I, I^2 etc.

Prin definiție, $p_k \in C^{(l)}(I)$, dacă p este continuă împreună cu toate derivatele sale pînă la ordinul l inclusiv în orice punct $s \in [0,1]$. Definiții analoage pentru $p_k(s, t)$ etc.

DEFINIȚIA 2.4.2. Se zice că operatorul $(\mathcal{D}P)$ *este continuu în* $R_2(H)$ dacă funcția reală

$$(s, t) \to p_1(s, t) = \langle (\mathcal{D}P)(u + sv + tw) \cdot g, h \rangle \in \mathcal{C}(I^2) \qquad (2.4.25)$$

oricare ar fi u, v, w, g, h arbitrare dar fixate în H.

Fie că P este un operator potențial pe H și fie Φ funcționala al cărei gradient este P.

Să atașăm ecuației (2.4.23) funcționala F,

$$u \in H, \; u \xrightarrow{F} F(u) = \Phi(u) - \langle f, u \rangle. \qquad (2.4.26)$$

TEOREMA 2.4.5. *Fie H un spațiu hilbertian real și fie $P : H \to H$ un operator potențial pe H care are următoarele proprietăți:*

A) *P este slab diferențiabil pe H; $P(0) = 0$;*
B) *$(\mathcal{D}P)$ este continuu în $R_2(H)$;*
C) *$\langle (\mathcal{D}P)(u) \cdot h, g \rangle = \langle (\mathcal{D}P)(u) \cdot g, h \rangle$, $u, h, g \in H$;*
D) *$\alpha^2 \|h\|^2 \geqslant \langle (\mathcal{D}P)(u) \cdot h, h \rangle \geqslant \beta^2 \|h\|^2$, $u, h \in H$.*

Atunci

1° *ecuația (2.4.23) are o singură soluție, fie ea u_0, oricare ar fi $f \in H$;*
2° *în u_0, funcționala (2.4.26) își atinge minimul absolut;*
3° *orice șir minimizant al funcționalei (2.4.26) converge la u_0.*

Demonstrație. a) Fie pe $H \times H$ următoarea funcțională

$$(u_1, u_2) \in H \times H, \; (u_1, u_2) \xrightarrow{\Psi} \Psi(u_1, u_2) = \langle Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 \rangle. \qquad (2.4.27)$$

Pentru u_1, u_2 arbitrari în H dar odată aleşi menţinuţi ficşi, fie funcţia reală

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad t \xrightarrow{p_2} p_2(t) = \langle P(tu_1 + (1-t)\,u_2), h\rangle, \tag{2.4.28}$$

unde h este de asemenea arbitrar, dar odată ales menţinut acelaşi, în H.

În virtutea presupunerii A), rezultă cu uşurinţă că p_2 este derivabilă pe (0,1) şi că, pentru orice $t \in (0,1)$, avem

$$p_2'(t) = \langle (\mathcal{D}P)\,(tu_1 + (1-t)\,u_2)\cdot(u_1 - u_2), h\rangle. \tag{2.4.29}$$

Avem

$$\langle Pu_1 - Pu_2,\ h\rangle = p_2(1) - p_2(0) = \int_0^1 \langle (\mathcal{D}P)\,(tu_1 + (1-t)\,u_2)\cdot(u_1 - u_2), h\rangle\,dt$$

din care, pentru $h = u_1 - u_2$, se obţine

$$\langle Pu_1 - Pu_2,\ u_1 - u_2\rangle = \Psi(u_1, u_2) = \int_0^1 \langle (\mathcal{D}P)\,(tu_1 + (1-t)\,u_2)\cdot (u_1 - u_2),\ u_1 - u_2\rangle\,dt. \tag{2.4.30}$$

Ţinînd seama de presupunerea D) a teoremei 2.4.5, din (2.4.30) rezultă

$$\langle Pu_1 - Pu_2,\ u_1 - u_2\rangle \geqslant \beta^2 \|u_1 - u_2\|^2. \tag{2.4.31}$$

O dată obţinută inegalitatea (2.4.31), demonstrarea faptului că dacă există soluţie a ecuaţiei (2.4.23) aceasta este unică, urmează ca în teorema variaţională a lui Langenbach (vezi teorema 2.3.1).

Aşadar, am demonstrat că, în ipotezele teoremei 2.4.5, dacă ecuaţia (2.4.23) are o soluţie, aceasta este unică.

Pentru a obţine teorema de existenţă a soluţiei este nevoie să demonstrăm mai întîi punctele 2° şi 3° ale teoremei.

Fie p_3 funcţia reală definită pe $0 \leqslant t \leqslant 1$, după cum urmează

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad t \xrightarrow{p_3} \Phi(tu)^1 \tag{2.4.32}$$

---

[1] De fapt, pentru fiecare $u \in H$, avem o asemenea funcţie şi de aceea (2.4.32) trebuie înţeleasă astfel:

$$u \in H,\ u \to p_{3_u},\ p_{3_u}(t) = \Phi(tu),\ \text{oricare ar fi}\ u \in H,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Observaţie analoagă pentru (2.4.28), unde pentru fiecare u_1, u_2, $h \in H$, trebuie considerată funcţia reală p_2, $t \in [0,1]$, $t \xrightarrow{p_{2_{u_1,u_2,h}}} \langle P(tu_1 + (1-t)\,u_2), h\rangle$

Odată precizat acest lucru, vom menţine pentru comoditatea scrierii notaţia din text, fără a mai explica în cele ce urmează semnificaţia ei.

Avem, evident,

$$p_3'(t) = \langle \Phi'(tu),\ u\rangle = \langle P\,(tu), u\rangle, \quad t \in (0,1). \tag{2.4.33}$$

Cum Φ, ca gradient al lui P, este definită pînă la o constantă aditivă, se poate presupune totdeauna $\Phi\,(\theta) = 0$, și deci

$$\Phi\,(u) = \Phi(u) - \Phi(\theta) = p_3(1) - p_3(0) = \int_0^1 p_3'(t)\,dt = \int_0^1 \langle P(tu),\ u\rangle\,dt \tag{2.4.34}$$

așadar

$$\Phi\,(u) = \int_0^1 \langle P\,(tu),\ u\rangle\,dt. \tag{2.4.35}$$

Din (2.4.27), ținînd seama că $P\,(\theta) = \theta$, rezultă

$$\Psi\,(tu,\ \theta) = \langle P\,(tu), tu\rangle. \tag{2.4.36}$$

Pe de altă parte, din (2.4.30) rezultă

$$\Psi(tu\,,\theta) = \int_0^1 \langle (\mathcal{D}P)\,(t^2u)\cdot(tu),\ tu\rangle\,dt \geqslant \int_0^1 \beta^2 \|tu\|^2. \tag{2.4.37}$$

Din (2.4.35), (2.4.36) și (2.4.37) rezultă

$$\Phi\,(u) = \int_0^1 \langle P(tu), u\rangle\,dt = \int_0^1 \langle P\,(tu), tu\rangle\,\frac{dt}{t} = \int_0^1 \Psi\,\frac{(tu,\ \theta)}{t}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 \beta^2\,\frac{\|tu\|^2}{t}\,dt = \frac{\beta^2}{2}\|u\|^2$$

și deci

$$F\,(u) = \Phi\,(u) - \langle f, u\rangle \geqslant \Phi\,(u) - \|f\|\,\|u\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\beta^2}{2}\|u\|^2 - \|f\|\,\|u\| \geqslant \frac{-1}{2}\,\frac{\|f\|}{\beta^2}. \tag{2.4.37}'$$

Așadar, F este mărginită inferior pe H.
Fie

$$d = \inf_{u\in H} F(u). \tag{2.4.38}$$

Din definiţia marginii inferioare rezultă existenţa şirurilor minimizante ale lui F pe H, adică ale unor şiruri u_n, astfel încît

$$F(u_n) \to d, \quad n \to \infty. \tag{2.4.39}$$

Avem

$$F(u+h) - F(u) = \Phi(u+h) - \Phi(u) - \langle f, h \rangle = \tag{2.4.39'}$$

$$= \int_0^1 \langle P(tu+th) - P(tu), u \rangle \, dt + \int_0^1 \langle P(tu+th), h \rangle \, dt - \langle f, h \rangle.$$

Pentru a evalua $\int_0^1 \langle P(tu+th) - P(tu), u \rangle \, dt$, să considerăm funcţia reală

$$(s,t) \in I^2, \ (s,t) \xrightarrow{p_4} \langle P(tu+sh), g \rangle, \quad u, h, g \in H. \tag{2.4.40}$$

În virtutea presupunerilor A), B), rezultă că $p_4 \in C^{(1)}(I^{(2)})$ şi că

$$\frac{\partial p_4}{\partial s} = \lim_{(\Delta s)\to 0} \left\langle \frac{P(tu+sh+(\Delta s)h) - P(tu+sh)}{\Delta s}, g \right\rangle = \langle (\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot h, g \rangle.$$

Aşadar, ţinînd seama şi de presupunerea C) din teorema 2.4.5 avem

$$\frac{\partial p_4}{\partial s} = \langle (\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot h, g \rangle = \langle (\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot g, h \rangle. \tag{2.4.41}$$

Avem, de asemenea,

$$\langle P(tu+th) - P(tu), g \rangle = p_4(t,t) - p_4(0,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} p_4(s,t) \, ds =$$

$$= \int_0^t \langle (\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot h, g \rangle \, ds$$

din care rezultă

$$\langle P(tu+th) - P(tu), u \rangle = \int_0^t \langle (\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot h, u \rangle \, ds$$

precum și

$$\int_0^1 \langle P(tu+th)-P(tu),\ u\rangle\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t \langle(\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot h,\ u\rangle\,\mathrm{d}s=$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t \langle(\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot u,\ h\rangle\,\mathrm{d}s=\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 \langle(\mathcal{D}P)(tu+sh)\cdot u,\ h\rangle\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P(tu+sh),h\rangle\right]\mathrm{d}t=\int_0^1\langle P(u+sh)-P(su+sh),h\rangle\,\mathrm{d}s.$$

În definitiv, se obține

$$\int_0^1\langle P(tu+th)-P(tu),u\rangle\,\mathrm{d}t=\int_0^1\langle P(u+sh)-P(su+sh),h\rangle\,\mathrm{d}s \qquad (2.4.42)$$

de care dacă se ține seama în (2.4.39′), rezultă

$$F(u+h)-F(u)=\int_0^1\langle P(u+sh),\ h\rangle\,\mathrm{d}s-\langle f,h\rangle. \qquad (2.4.43)$$

Comparînd această ultimă formulă cu formula evidentă

$$F(u+h)-F(u)=\Phi(u+h)-\Phi(u)-\langle f,\ h\rangle \qquad (2.4.44)$$

rezultă că

$$\Phi(u+h)-\Phi(u)=\int_0^1\langle P(u+sh),\ h\rangle\,\mathrm{d}s. \qquad (2.4.45)$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (2.4.26), obținem

$$F(u+h)+F(u)-2F\left(u+\frac{h}{2}\right)=\Phi(u+h)+\Phi(u)-$$

$$-2\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)=\left[\Phi(u+h)-\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)\right]-\left[\Phi\left(u+\frac{h}{2}\right)-\Phi(u)\right]=$$

$$=\int_0^1\left\langle P\left(u+\frac{h}{2}+s\frac{h}{2}\right),\ \frac{h}{2}\right\rangle\mathrm{d}s-\int_0^1\left\langle P\left(u+s\frac{h}{2}\right),\ \frac{h}{2}\right\rangle\mathrm{d}s=$$

$$=\int_0^1\left\langle P\left(u+s\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-P\left(u+s\frac{h}{2}\right),\ \frac{h}{2}\right\rangle\mathrm{d}s.$$

Ţinînd seama de (2.4.30), avem, în definitiv,

$$F(u+h)+F(u)-2F\left(u+\frac{h}{2}\right)=$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\left\langle (\mathcal{D}P)\left(u+s\frac{h}{2}+t\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{h}{2},\ \frac{h}{2}\right\rangle dt\right]ds$$

iar după C) rezultă

$$F(u+h)+F(u)-2F\left(u+\frac{h}{2}\right)\geqslant\frac{\beta^2}{4}\|h\|^2. \tag{2.4.46}$$

Fie u_n un şir minimizant pentru F pe H. Oricare ar fi m şi n naturali, din (2.4.46) urmează

$$F(u_m)+F(u_n)-2F\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right)\geqslant\frac{\beta^2}{4}\|u_m-u_n\|^2. \tag{2.4.47}$$

O dată obţinută această inegalitate, cu aceeaşi tehnică utilizată la teorema (2.3.3), rezultă că dacă u_n este şir minimizant pentru F pe H, el este şir Cauchy şi deci are limită în H, precum şi că toate şirurile minimizante au aceeaşi limită.

Fie aşadar u_n un şir minimizant al funcţionalei F pe H şi fie u_0 limita sa.

Vom dovedi că

$$F(u_0)=\inf_{u\in H}F(u). \tag{2.4.48}$$

Vom începe prin a dovedi că în ipotezele teoremei (2.4.5), F este slab inferior semicontinuă pe H, deci că, oricare ar fi

$$u_n\xrightarrow{\text{slab}}u\Rightarrow\varliminf_{n\to\infty}F(u_n)\geqslant F(u)$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru, că oricare ar fi

$$h_n\xrightarrow{\text{slab}}0\Rightarrow\varliminf_{n\to\infty}F(u+h_n)\geqslant F(u), \tag{2.4.49}$$

u fiind un element arbitrar al lui H.

Dar, în conformitate cu (2.4.43),

$$F(u+h_n)-F(u)=\int_0^1 \langle P(u+sh_n),\ h_n\rangle\,ds-\langle f,h_n\rangle=$$

$$=\int_0^1 \langle P(u+sh_n)-Pu,h_n\rangle\,ds+\langle Pu,h_n\rangle-\langle f,h_n\rangle. \quad (2.4.50)$$

Dar, $\langle P(u+sh_n)-Pu,h_n\rangle$ poate fi evaluat după formula (2.4.30) după cum urmează:

$$\langle P(u+sh_n)-Pu,h_n\rangle=\frac{1}{s}\langle P(u+sh_n)-Pu,sh_n\rangle=$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^1 \langle (\mathcal{D}P)(u+tsh_n)\cdot(sh_n),\ sh_n\rangle\,dt \quad (2.4.51)$$

astfel că (2.4.50) devine

$$F(u+h_n)-F(u)=\int_0^1\frac{ds}{s}\int_0^1\langle(\mathcal{D}P)(u+tsh_n)\cdot(sh_n),\ sh_n\rangle\,dt+$$

$$+\langle Pu,h_n\rangle-\langle f,h_n\rangle. \quad (2.4.52)$$

Ținînd însă seama de ipoteza D), din (2.4.52) rezultă

$$F(u+h_n)-F(u)\geqslant\langle Pu,h_n\rangle-\langle f,h_n\rangle=\langle Pu-f,h_n\rangle. \quad (2.4.53)$$

Din această ultimă inegalitate, ținînd seama că $h_n \xrightarrow{\text{slab}} \theta$, rezultă

$$\varliminf_{n\to\infty} F(u+h_n)-F(u)\geqslant 0. \quad (2.4.54)$$

Fie în (2.4.54), $u=u_0$, $h_n=u_n-u_0$, unde u_n este un șir minimizant al lui F iar u_0 limita sa. Din (2.4.54) rezultă

$$\varliminf_{n\to\infty} F(u_n)\geqslant F(u_0). \quad (2.4.55)$$

Cum u_n este șir minimizant pentru F,

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n)=d$$

şi deci, din (2.4.55), rezultă

$$d \geqslant F(u_0). \tag{2.4.56}$$

Cum însă din definiţia marginii inferioare rezultă şi

$$F(u_0) \leqslant d, \tag{2.4.57}$$

din (2.4.56) şi (2.4.57) rezultă

$$F(u_0) = d. \tag{2.4.58}$$

Să demonstrăm, în sfîrşit, că u_0 este soluţie a ecuaţiei (2.4.23). Este evident, în virtutea ipotezelor teoremei 2.4.5, că funcţia

$$t \in I,\ t \xrightarrow{p_6} p_6(t) = F\left(u_0 - \frac{h}{2} + th\right),$$

are proprietatea $p_6 \in C^{(1)}(I)$.

Cum u_0 realizează minimul absolut al lui F pe H, $t = \frac{1}{2}$ realizează minimul absolut al lui p_6 pe I şi deci, în mod necesar,

$$p_6'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Dar,

$$p_6'\left(\frac{1}{2}\right) = \langle Pu_0 - f, h\rangle,$$

de unde

$$\langle Pu_0 - f, h\rangle = 0$$

oricare ar fi $h \in H$, deci

$$Pu_0 = f.$$

Raţionamentul care urmează are drept scop demonstrarea faptului că în ipotezele teoremei 2.4.5, se poate alege şirul minimizant pentru funcţio-

nala F, dintr-o anumită bulă închisă căreia, evident, îi aparține și limita acestui șir.

Într-adevăr, am demonstrat (vezi (2.4.37')) că

$$F(u) \geqslant \frac{\beta^2}{2}\|u\|^2 - \|f\|\,\|u\|. \tag{2.4.59}$$

Să considerăm bula închisă

$$B'\left(\theta, \frac{2\|f\|}{\beta^2}\right) = \left\{u / \|u\| \leqslant \frac{2\|f\|}{\beta^2}\right\}. \tag{2.4.60}$$

Din (2.4.59) rezultă că pentru orice $u \in B'\left(\theta, \frac{2\|f\|}{\beta^2}\right)$, deci pentru care

$$\|u\| > \frac{2\|f\|}{\beta^2},$$

rezultă că

$$F(u) > 0.$$

Cum, pe de altă parte,

$$F(\theta) = 0$$

rezultă că ne putem limita la a alege șirul minimizant astfel ca

$$\{u_n\} \subset B'\left(\theta, \frac{2\|f\|}{\beta^2}\right) \tag{2.4.61}$$

Din (2.4.61) rezultă că limita șirului minimizant u_n și deci, după teorema 2.4.5, soluția ecuației (2.4.23), aparține de asemenea bulei $B'\left(\theta, \frac{2\|f\|}{\beta^2}\right)$, deci

$$\|u_0\| \leqslant \frac{2\|f\|}{\beta^2}. \tag{2.4.62}$$

Să observăm, în sfîrșit,

TEOREMA 2.4.6. *Condițiile A), B), C) din teorema 2.4.5 sînt suficiente pentru ca P să fie potențial pe H.*

Demonstrație. Într-adevăr, condițiile A), B), C) ale teoremei 2.4.5 au permis obținerea formulei

$$\Phi(u+h)-\Phi(u)=\int_0^1 \langle P(u+sh),h\rangle\,ds. \tag{2.4.63}$$

Din (2.4.63) urmează

$$\Phi(u+th)-\Phi(u)=\int_0^1 \langle P(u+sth),th\rangle\,ds. \tag{2.4.64}$$

Din (2.4.64), ținînd seama că în virtutea lui A) funcția reală

$$(s,t)\xrightarrow{p_7} p_7(s,t)=\langle P(u+sth),g\rangle$$

are proprietatea $p_7\in C^{(1)}(I^2)$, rezultă că

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+th)-\Phi(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_0^1\langle P(u+sth),h\rangle\,ds=\langle Pu,h\rangle,$$

ceea ce demonstrează teorema.

§ 2.5. Construcția șirului minimizant pentru funcționala F

Avem (vezi (2.4.26))

$$F(u)=\Phi(u)-\langle f,u\rangle, \tag{2.5.1}$$

unde

$$\Phi(u)=\int_0^1\langle P(tu),u\rangle\,dt. \tag{2.5.2}$$

Am demonstrat că ipotezele A), B), C) sînt suficiente pentru ca P să fie potențial și am dovedit că funcționala

$$u\xrightarrow{\Phi}\Phi(u)=\int_0^1\langle P(tu),u\rangle\,dt \tag{2.5.3}$$

are proprietatea că

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+th)-\Phi(u)}{t}=\langle Pu,h\rangle. \tag{2.5.4}$$

Să punem prin definiție

$$\frac{\partial F(u)}{\partial h} = \frac{1}{\|h\|} \lim_{t \to 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} \tag{2.5.5}$$

oricare ar fi $u, h \in H$, $h \neq 0$.

Vom dovedi că

$$\frac{\partial F(u)}{\partial h} = \frac{1}{\|h\|} \langle Pu - f, h \rangle. \tag{2.5.6}$$

Într-adevăr, din (2.5.1) rezultă,

$$\frac{\partial F(u)}{\partial h} = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial h} - \frac{1}{\|h\|} \langle f, h \rangle$$

și este suficient să se țină seama de (2.5.4).

Vom începe construcția unui șir minimizant pentru funcționala F dată de (2.5.1), de la un element arbitrar, fie el u_1, al spațiului H.

Să punem prin definiție

$$z_1 = f - Pu_1 \tag{2.5.7}$$

și să considerăm, pentru u_1 și z_1 mai sus considerați, funcția reală

$$t \to \varphi_1(t) = F(u_1 + tz_1), \; t \geqslant 0. \tag{2.5.8}$$

Dacă $Pu_1 = f$, construcția se oprește. Fie că $Pu_1 \neq f$, deci $\|z_1\| > 0$. Avem

$$\frac{1}{\|z_1\|} \varphi_1'(0) = \frac{1}{\|z_1\|} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(u_1 + (\Delta t) z_1) - F(u_1)}{\Delta t} = \frac{\partial F(u_1)}{\partial z_1} =$$

$$= \frac{1}{\|z_1\|} \langle Pu_1 - f, z_1 \rangle = \frac{1}{\|z_1\|} \langle Pu_1 - f, f - Pu_1 \rangle = -\frac{1}{\|z_1\|} \|Pu_1 - f\|^2 < 0.$$

Așadar,

$$\varphi_1'(0) < 0.$$

Vom demonstra că există un interval pe care derivata lui φ_1 este negativă, deci pe care φ_1 este descrescătoare.

Într-adevăr, avem

$$\varphi_1'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(u_1 + tz_1 + (\Delta t)\, z_1) - F(u_1 + tz_1)}{\Delta t} =$$

$$= \langle F'(u_1 + tz_1), z_1 \rangle = \langle \Phi'(u_1 + tz_1), z_1 \rangle - \langle f, z_1 \rangle =$$

$$= \langle P(u_1 + tz_1), z_1 \rangle - \langle f, z_1 \rangle = \langle P(u_1 + tz_1) - Pu_1, z_1 \rangle +$$

$$+ \langle Pu_1 - f, z_1 \rangle = \frac{1}{t} \langle P(u_1 + tz_1) - Pu_1, tz_1 \rangle - \|z_1\|^2 =$$

$$= \frac{1}{t} \Psi(u_1 + tz_1, u_1) - \|z_1\|^2.$$

Așadar,

$$\varphi_1'(t) = \frac{1}{t} \Psi(u_1 + tz_1, u_1) - \|z_1\|^2. \tag{2.5.9}$$

Ținînd cont însă de condiția D), rezultă din (2.4.30) că

$$\Psi(u_1 + tz_1, u_1) \leqslant \alpha^2 \|tz_1\|^2 \tag{2.5.10}$$

iar din (2.5.9) și (2.5.10) rezultă

$$\varphi_1'(t) \leqslant (\alpha^2 t - 1) \|z_1\|^2, \tag{2.5.11}$$

care arată că φ_1 este strict descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{1}{\alpha^2}\right]$. Să punem

$$z_n = f - Pu_n, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\alpha^2} z_n.$$

Șirul numeric

$$F(u_1), \quad F(u_2), \cdots, F(u_n), \cdots$$

este monoton descrescător.

Într-adevăr, din faptul că φ_1 este strict descrescătoare pe $\left[0, \frac{1}{\alpha^2}\right]$ rezultă $\varphi_1(0) > \varphi_1\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$ ceea ce, ținînd seama de (2.5.8), se mai scrie

$$F(u_1) > F(u_2). \tag{$*$}$$

Considerînd acum funcția reală φ_2 definită astfel

$$t \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(t) = F(u_2 + tz_2), \quad t \geqslant 0$$

și repetînd raționamentul făcut mai sus pentru φ_1 se ajunge la concluzia că φ_2 este strict descrecătoare pe $\left[0, \frac{1}{\alpha^2}\right]$ și deci $\varphi_2(0) > \varphi_2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$, ceea ce, ținînd seama de definiția lui φ_2, această inegalitate se mai scrie

$$F(u_2) > F(u_3). \qquad (\ast\ast)$$

Din $(\ast)$ și $(\ast\ast)$ rezultă

$$F(u_1) > F(u_2) > F(u_3).$$

Continuînd procesul se obține rezultatul că șirul $F(u_n)$ este monoton descrecător. Fiind monoton descrescător și mărginit inferior de

$$d = F(u_0) = \inf_{u \in H} F(u),$$

rezultă că $F(u_n)$ este convergent, există deci d^* astfel încît

$$F(u_n) \to d^* \geqslant d, \quad n \to \infty. \qquad (2.5.12)$$

Pe de altă parte, avem (vezi (2.4.47))

$$F(u_n) + F(u_{n+1}) - 2F\left(\frac{u_n + u_{n+1}}{2}\right) \geqslant \frac{\beta^2}{4} \| u_{n+1} - u_n \|^2.$$

Deoarece $F\left(\frac{u_n + u_{n+1}}{2}\right) \geqslant d^*$, avem, evident,

$$F(u_n) + F(u_{n+1}) - 2F\left(\frac{u_n + u_{n+1}}{2}\right) \leqslant [F(u_n) - d^*] + [F(u_{n+1}) - d^*]. \qquad (2.5.13)$$

Dar șirul $F(u_n) \to d^*$ și deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există n_0 astfel încît pentru orice $n \geqslant n_0$, avem

$$F(u_n) - d^* < \varepsilon^2 \frac{\beta^2}{8} \qquad (2.5.14)$$

$$F(u_{n+1}) - d^* < \varepsilon^2 \frac{\beta^2}{8}. \qquad (2.5.15)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (2.5.13), (2.5.14), (2.5.15), rezultă

$$F(u_n) + F(u_{n+1}) - 2F\left(\frac{u_n + u_{n+1}}{2}\right) < \varepsilon^2 \frac{\beta^2}{4} \tag{2.5.16}$$

iar din (2.5.16) şi (2.4.47) rezultă

$$\|u_{n+1} - u_n\| < \varepsilon, \tag{2.5.17}$$

inegalitate care arată că

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0,$$

deci că

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 0 = \lim_{n\to\infty} \|Pu_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \|Pu_n - Pu_0\|. \tag{2.5.18}$$

Pe de altă parte, din (2.4.30), ţinînd seama de D), rezultă

$$\beta^2\|u_n - u_0\|^2 \leqslant \langle Pu_n - Pu_0,\ u_n - u_0\rangle \leqslant \|Pu_n - Pu_0\|\,\|u_n - u_0\|,$$

sau

$$\beta^2\|u_n - u_0\| \leqslant \|Pu_n - Pu_0\|,$$

din care, ţinînd seama de (2.5.18), rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\| = 0,$$

care arată că u_n astfel construit este un şir minimizant şi deci $d^* = d$. Să remarcăm în încheiere că procesul descris mai sus pentru construirea unui şir minimizant poate căpăta şi aspectul unui proces iterativ, dacă scriem ecuaţia

$$Pu = f$$

sub forma echivalentă

$$u = u - \frac{1}{\alpha^2}(Pu - f) = Tu.$$

Atunci, termenul de rang $n + 1$ al şirului minimizant definit de

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\alpha^2} z_n, \quad z_n = f - Pu_n,$$

poate fi scris, evident, sub forma

$$u_{n+1} = Tu_n. \tag{2.5.19}$$

Pasul procesului de iterație este constant și egal cu $\frac{1}{\alpha^2}$.

§ 2.6. Spații energetice pentru probleme neliniare [47 b]

Condițiile în care a fost stabilită teorema variațională a lui Langenbach sugerează introducerea unui spațiu energetic pentru problema (2.3.1), (2.3.2) prin analogie cu ceea ce se face în cazul operatorilor liniari și pozitivi pe spații hilbertiene. Fie H un spațiu hilbertian real și $\mathcal{D}(A)$ o mulțime liniară și densă a sa. Fie A un operator liniar

$$A : \mathcal{D}(A) \to H, \tag{2.6.1}$$

pozitiv

$$\langle Au, u\rangle_H > 0, \; u \in H, \; u \neq \theta, \tag{2.6.2}$$

și simetric

$$\langle Au, v\rangle_H = \langle u, Av\rangle_H, \; u, v \in H. \tag{2.6.3}$$

(În cazul în care H este complex, relația ce exprimă simetria lui A este o consecință a faptului că A este pozitiv (vezi mai departe lema 5.1.2.1).

Se știe că, atunci, se poate introduce pe $\mathcal{D}(A)$ un produs scalar prin formula

$$\langle u, v\rangle_{H_A} = \langle Au, v\rangle_H; \; u, v \in \mathcal{D}(A). \tag{2.6.4}$$

Închiderea lui $\mathcal{D}(A)$ în norma generată de produsul scalar (2.6.4), fie ea H_A, se numește spațiul energetic atașat operatorului A. În cazul în care A este pozitiv definit, deci în cazul în care există o constantă $\gamma^2 > 0$ astfel încît

$$\langle Au, u\rangle_H \geqslant = \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad u \in \mathcal{D}(A) \tag{2.6.5}$$

spațiul H_A este scufundat în H cu o injecție continuă (vezi mai departe teorema 5.2.1.3). Aceasta este ideea fundamentală a cunoscutei construcții a lui Friedrichs de extindere a unui operator simetric și pozitiv definit la unul a cărui mulțime de valori este spațiul întreg, deci pentru care ecuația

$$Au = f,$$

are totdeauna soluție.

Scanned with OKEN Scanner

Fie că la ipotezele teoremei 2.3.3 se adaugă următoarea:

există $u_0 \in M$ astfel încît, pentru orice $h \in M^0$, este satisfăcută inegalitatea

$$\langle (DP(u) \cdot h, h \rangle_{H(\Omega)} \geqslant \gamma_0^2 \langle DP)(u_0) \cdot h, h \rangle_{H(\Omega)}. \tag{2.6.6}$$

Introducem pe M^0 un nou produs scalar prin

$$\langle u, v \rangle_{H_0} = \langle (DP)(u_0) \cdot u, v \rangle_{H(\Omega)}, \quad u, v \in M^0. \tag{2.6.7}$$

Fie H_0 închiderea lui M^0 în norma generată de produsul scalar dat de (2.6.7).

Atunci are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 2.6.1. *Dacă u_n este un şir minimizant pentru funcţionala* (2.3.5), (2.3.6), *atunci u_n converge în metrica lui H_0.*

Demonstraţie. Am dovedit că (vezi (2.3.41))

$$F(u+h) + F(u) - 2F\left(u + \frac{h}{2}\right) = \Phi(u+h) + \Phi(u) - 2\Phi\left(u + \frac{h}{2}\right) =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\langle (DP)\left(u + s\frac{h}{2} + t\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right\rangle_{H(\Omega)} dt \right] ds. \tag{2.6.8}$$

Din (2.6.8), ţinînd seama de (2.6.6), rezultă însă

$$F(u+h) + F(u) - 2F\left(u + \frac{h}{2}\right) \geqslant \frac{\gamma_0^2}{4} \langle (DP)(u_0) \cdot h, h_{H(\Omega)} \rangle = \frac{\gamma_0^2}{4} \| h \|_{H_0}^2. \tag{2.6.9}$$

Fie u_n un şir minimizant pentru funcţionala F şi fie în (2.6.9) $u = u_m$, $h = u_n - u_m$. Din (2.6.9) rezultă

$$F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \geqslant \frac{\gamma_0^2}{4} \| u_n - u_m \|_{H_0}^2. \tag{2.6.10}$$

Dar, dacă u_n este un şir minimizant pentru F, avem (vezi (2.3.49)):

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \left[F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \right] = 0$$

de care, dacă se ţine seama în (2.6.10), rezultă că şirul minimizant u_n este şir Cauchy în metrica lui H_0 şi deci are limită în H_0.

Scanned with OKEN Scanner

Fie în cele ce urmează că sînt îndeplinite condițiile teoremei variaționale a lui Langenbach și că $M^0 = M$ (după cum se va vedea acest lucru se întîmplă frecvent în aplicații).

Să punem prin definiție

$$\rho(u, v) = \left[F(u) + F(v) - 2F\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]^{1/2} \tag{2.6.11}$$

pentru orice $u, v \in M^0$.

Să remarcăm că, deoarece în teorema lui Langenbach, P era definit de la M la H, în virtutea presupunerii $M^0 \equiv M$ avem

$$M^0 \equiv M \equiv \mathcal{D}(P). \tag{2.6.12}$$

Vom defini pe $\mathcal{D}(P)$ o topologie după cum urmează:

fie u fixat în $\mathcal{D}(P)$, altfel arbitrar. Mulțimile de puncte v, definite prin

$$\{v/v \in \mathcal{D}(P),\ \rho(u, v) \leqslant \varepsilon\} \tag{2.6.13}$$

sau prin

$$\{v/v \in \mathcal{D}(P),\ \rho(u, v) \geqslant \varepsilon\}, \tag{2.6.14}$$

unde $\rho(u, v)$ este dată de (2.6.11) se vor numi închise.

Se vor numi, de asemenea, închise, reuniunile finite de mulțimi de forma lui (2.6.13) sau (2.6.14) precum și intersecția oricărei familii de asemenea mulțimi.

Pentru o mulțime oarecare $G \subset \mathcal{D}(P)$, vom numi închiderea ei intersecția tuturor mulțimilor închise (în sensul precizat mai sus), care conțin pe G. Dacă G este mulțime vidă sau $G = \mathcal{D}(P)$, atunci punem $\overline{G} = G$.

O asemenea definire a operației de închidere satisface axiomele lui Hausdorff.

Fie u_n un șir din $\mathcal{D}(P)$ cu proprietatea că

$$\rho(u_m, u_n) \to 0,\ m, n \to \infty. \tag{2.6.15}$$

Din (2.6.11) și (2.3.42) rezultă

$$\rho(u_m, u_n) \geqslant \frac{\gamma}{2} \|u_m - u_n\|_{H(\Omega)} \tag{2.6.16}$$

iar din (2.6.15) și (2.6.16) rezultă

$$\|u_m - u_n\|_{H(\Omega)} \to 0, \quad m, n \to \infty$$

care arată că șirul u_n converge în metrica lui H și deci există $u^* \in H$ astfel încît

$$\|u_n - u^*\|_{H(\Omega)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Adăugînd la $\mathcal{D}(P)$ toate limitele de astfel de șiruri, se obține o nouă mulțime care se numește „spațiul energetic al operatorului P" și se notează H_P.

Este de remarcat că denumirea de „spațiu energetic" este convențională, pe H_P neavînd în general nici o topologie.

Să observăm totuși că există un caz în care pe H_P se poate introduce o topologie și chiar o metrică.

Să observăm mai întîi că din (2.6.11) rezultă imediat

1) $\rho(u, v) = \rho(v, u)$; $u, v \in \mathcal{D}(P)$

2) $\rho(u, v) \geqslant 0$ iar în baza strictei convexități a lui F pe M^0, $\rho(u, v) = 0$ este echivalent cu $u \equiv v$, adică aplicația ρ,

$$\rho : M^0 \times M^0 \to R^+$$

satisface axiomele metricii cu excepția axiomei triunghiului. Fie că ρ satisface inegalitatea slabă a triunghiului, adică există o constantă $a \geqslant 1$, astfel încît

$$\rho(u, v) \leqslant a\,[\rho(u, w) + \rho(w, v)], \quad u, v, w \in \mathcal{D}(P). \tag{2.6.17}$$

(Ulterior vom furniza o condiție suficientă pentru ca ρ să satisfacă (2.6.17)).

Dacă în (2.6.17) $a = 1$, atunci ρ este o metrică pe $\mathcal{D}(P)$ și H_P reprezintă completatul lui $\mathcal{D}(P)$ în această metrică.

Fie că $a > 1$.

În acest caz vom face uz de următoarea teoremă (vezi Chittenden [19])

TEOREMA 2.6.2. *Fie M^0 o mulțime și aplicația*

$$\rho : M^0 \times M^0 \to R$$

cu următoarele proprietăți:

1) $\rho(u, v) \geqslant 0$, $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \equiv v$; $u, v \in M^0$;

2) $\rho(u, v) = \rho(v, u)$; $u, v \in M^0$;

3) *există o funcție reală f definită pentru $t \geqslant 0$, cu $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$, astfel încît, din $\rho(u, w) < t$ și $\rho(w, v) < t$, rezultă $\rho(u, v) < f(t)$. Atunci, pe M^0 se poate introduce o metrică $\tilde{\rho}$, topologic echivalentă cu ρ.*

Să observăm că, ρ definită de (2.6.11) satisface condițiile 1) și 2) ale teoremei lui Cittenden. Dacă ρ satisface și inegalitatea slabă a triunghiului, atunci, din

$$\rho(u, w) < t, \quad \rho(w, v) < t$$

și din (2.6.17), rezultă

$$\rho(u, v) < 2at$$

deci este satisfăcută și condiția 3) a teoremei lui Cittenden, pentru $f(t) = 2at$.

În concluzie, dacă ρ definită prin (2.6.11) satisface (2.6.17), atunci există o metrică $\tilde{\rho}$ pe $\mathcal{D}(P)$, topologic echivalentă cu ρ. În acest caz, H_P este completatul lui $\mathcal{D}(P)$ în această metrică.

Următoarea teoremă furnizează o condiție suficientă pentru ca ρ definită de (2.6.11) să satisfacă inegalitatea slabă a triunghiului.

TEOREMA 2.6.3. *Fie că sînt satisfăcute toate ipotezele teoremei* 2.3.3 *și, în plus, următoarea: există constantele* $\alpha^2 > 0$ *și* $\beta^2 > 0$ *precum și* $u_0 \in M^0 \equiv \mathcal{D}(P)$, *astfel încît, pentru orice* $h \in M^0 \equiv \mathcal{D}(P)$, *să avem*

$$\alpha^2 \langle (DP)(u_0) \cdot h, h \rangle_{H(\Omega)} \leqslant \langle (DP)(u) \cdot h, h \rangle_{H(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta^2 \langle (DP)(u_0) \cdot h, h \rangle_{H(\Omega)}, \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0. \tag{2.6.18}$$

Atunci ρ *definită de* (2.6.11) *satisface inegalitatea slabă a triunghiului.*

Demonstrație. Din (2.3.41), pentru $h = u - v$, rezultă

$$\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left[\int_0^1 \left\langle (DP)\left(u + (s+t)\frac{u-v}{2}\right) \cdot (u-v),\ u-v \right\rangle_{H(\Omega)} dt\right] ds, \tag{2.6.19}$$

și din (2.6.19) și (2.6.11) rezultă

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left[\int_6^1 \left\langle (DP)\left(u + (s+t)\frac{u-v}{2}\right) \cdot (u-v),\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. u - v \right\rangle_{H(\Omega)} dt\right] ds\right]^{1/2}. \tag{2.6.20}$$

Din această ultimă egalitate, ţinînd seama de partea dreaptă a dublei inegalităţi (2.6.18), rezultă

$$\rho(u, v) \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 \beta^2 \langle (DP)(u_0)\cdot(u-v), u-v\rangle_{H(\Omega)}\, dt\, ds\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\beta\|u-v\|_{H_0} \leqslant \frac{\beta}{2}[\|u-w\|_{H_0} + \|w-v\|_{H_0}].$$

Deci

$$\rho(u, v) \leqslant \frac{\beta}{2}[\|u-w\|_{H_0} + \|w-v\|_{H_0}]. \tag{2.6.21}$$

Pe de altă parte, tot din compararea lui (2.6.20) dar cu partea stîngă a dublei inegalităţi (2.6.18) rezultă

$$\rho(u, v) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|u-v\|_{H_0}. \tag{2.6.22}$$

Cum (2.6.22) este adevărată oricare ar fi $u, v \in M^0 \equiv \mathcal{D}(P)$, rezultă

$$\|u-w\|_{H_0} \leqslant \frac{2}{\alpha}\rho(u, w), \quad \|w-v\|_{H_0} \leqslant \frac{2}{\alpha}\rho(w, v). \tag{2.6.23}$$

Din (2.6.21) şi (2.6.23)

$$\rho(u, v) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}[\rho(u, w) + \rho(w, v)]$$

şi deci ρ satisface inegalitatea slabă a triunghiului pentru $a = \frac{\beta}{\alpha}$ (de remarcat că din (2.6.18) rezultă $\frac{\beta}{\alpha} \geqslant 1$). Aşadar, în cazul în care în afara ipotezelor teoremei variaţionale a lui Langenbach este satisfăcută şi (2.6.18), există o metrică $\tilde{\rho}$ pe $M^0 \equiv \mathcal{D}(P)$ topologic echivalentă cu ρ.

TEOREMA 2.6.4. *Dacă u_n este un şir minimizant al funcţionalei F, atunci u_n converge în metrica $\tilde{\rho}$.*

Demonstrație. Într-adevăr, am demonstrat că dacă u_n este un șir minimizant pentru F, atunci el este un șir Cauchy în metrica lui H_0. Cum însă (vezi relația anterioară lui (2.6.21))

$$\rho(u_m, u_n) \leqslant \frac{\beta}{2} \|u_m - u_n\|_{H_0}$$

rezultă că dacă u_n este un șir minimizant pentru F, atunci $\rho(u_m, u_n) \to 0$, $m, n \to \infty$ și cum ρ este topologic echivalentă cu $\tilde{\rho}$, rezultă că u_n este șir Cauchy în metrica $\tilde{\rho}$, deci există $u_0^* \in H_P$ (completatul lui $\mathcal{D}(P)$ în metrica $\tilde{\rho}$) astfel încît

$$\tilde{\rho}(u_n, u_0^*) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Operatori monotoni în sensul lui Minty-Browder

§ 3.1. Consideraţii preliminare

Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi fie X^* dualul său. Pentru orice pereche $x \in X$, $x^* \in X^*$, vom nota

$$x^*(x) = \langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle. \tag{3.1.1}$$

DEFINIŢIA 3.1.1. Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi real şi fie X^* dualul său. Fie $\mathcal{D}(T)$ o submulţime a lui X şi operatorul

$$T : \mathcal{D}(T) \to X^*. \tag{3.1.2}$$

Operatorul T se zice monoton pe $\mathcal{D}(T)$, dacă pentru orice $u, v \in \mathcal{D}(T)$,

$$\langle Tu - Tv, \quad u - v\rangle \geqslant 0. \tag{3.1.3}$$

Odată pusă definiţia, preocuparea pentru studiul operatorilor monotoni în acest capitol apare ca naturală, în lumina rezultatelor obţinute în capitolele anterioare.

Într-adevăr, cîteva din rezultatele capitolelor anterioare au furnizat exemple de operatori monotoni în sensul lui Minty-Browder.

a) Am demonstrat (vezi § 1.1) că dacă X este un spaţiu Banach real al cărui dual X^* este strict convex şi dacă φ este o funcţie numerică definită pentru $0 \leqslant r < \infty$, continuă, strict crescătoare şi astfel ca $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$, atunci există o aplicaţie

$$J : X \to X^* \tag{3.1.4}$$

cu următoarele proprietăţi:

$$\langle Ju, u\rangle = \varphi(\|u\|)\,\|u\|, \tag{3.1.5}$$

$$\|Ju\| = \varphi(\|u\|). \tag{3.1.6}$$

Am demonstrat că aplicaţia J are proprietatea

$$\langle Ju - Jv, u - v\rangle \geqslant 0 \tag{3.1.7}$$

pentru orice $u, v \in X$, deci după definiţia 3.1.1, aplicaţia J, pe care am numit-o aplicaţie de dualitate între X şi X^* corespunzătoare funcţiei de normalizare φ, este o aplicaţie monotonă în sensul lui Minty-Browder. Este un exemplu foarte comod şi după cum vom vedea foarte important, de aplicaţie monotonă în sensul lui Minty-Browder.

b) Am demonstrat că în cazul în care P este presupus liniar, teorema variaţională a lui Langenbach se reduce la o cunoscută teoremă variaţională pentru operatori liniari şi pozitivi pe spaţii hilbertiene, teoremă pe care o reproducem aici:

TEOREMA 3.1.1. *Fie H un spaţiu hilbertian real, $\mathcal{D}(P)$ o mulţime liniară a lui H, densă în H şi $P : \mathcal{D}(P) \to H$, cu următoarele proprietăţi:*

1) *P este liniar şi pozitiv pe $\mathcal{D}(P)$, adică*

$$\langle Ph, h\rangle > 0 \tag{3.1.8}$$

oricare ar fi $h \in H$, $h \neq \theta$;

2) *P este simetric, adică*

$$\langle Ph_1, h_2\rangle = \langle h_1, Ph_2\rangle \tag{3.1.9}$$

pentru orice două puncte h_1, $h_2 \in \mathcal{D}(P)$.

Fie f un element al lui H. Atunci:

a) *dacă ecuaţia $Pu = f$ are soluţie, această soluţie este unică şi ea realizează pe $\mathcal{D}(P)$ minimul funcţionalei*

$$u \in \mathcal{D}(P),\ u \xrightarrow{F} F(u) = \langle Pu, u\rangle - 2\langle f, u\rangle; \tag{3.1.10}$$

b) *reciproc, dacă există un element $u_0 \in \mathcal{D}(P)$ care realizează pe $\mathcal{D}(P)$ minimul funcţionalei* (3.1.10), *atunci u_0 este soluţie a ecuaţiei $Pu = f$, şi după primul punct al teoremei, unica soluţie a acestei ecuaţii.*

La vremea respectivă (vezi comentariul la teorema 2.3.2) am făcut următoarea remarcă cu privire la demonstrarea primei părţi a acestei teoreme: fie că există o soluţie a ecuaţiei $Pu = f$, fie ea u_0. Unicitatea este o consecinţă imediată a pozitivităţii lui P. Faptul că u_0 realizează pe $\mathcal{D}(P)$ minimul funcţionalei (3.1.10) a fost obţinut în felul următor: dat fiind că $Pu_0 = f$ şi utilizînd simetria lui P, funcţionala (3.1.10) a putut fi scrisă în orice punct $u \in \mathcal{D}(P)$ sub forma (vezi (2.3.33))

$$F(u) = \langle Pu - Pu_0,\ u - u_0\rangle - \langle Pu_0, u_0\rangle. \tag{3.1.11}$$

Odată pusă $F(u)$ sub forma (3.1.11), tragerea concluziei că u_0 realizează minimul lui F pe $\mathcal{D}(P)$, a rezultat ţinînd seama că pentru orice $u \neq u_0$, avem

$$\langle Pu - Pu_0,\ u - u_0\rangle = \langle P(u - u_0),\ u - u_0\rangle > 0. \tag{3.1.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, nu faptul că P este liniar a fost esenţial, ci faptul că

$$\langle Pu - Pu_0, \quad u - u_0 \rangle > 0,$$

adică faptul că P este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe $\mathcal{D}(P)$. Este adevărat, aici aveam de-a face cu un caz particular de operator strict monoton, cazul în care este liniar şi în care definiţia strictei monotonii după Minty-Browder revine la definirea pozitivităţii lui P.

Consideraţiile de mai sus arată încă odată că teoremele de existenţă în cazul liniar nu sînt legate în mod esenţial de liniaritate ci sînt, mai ales, consecinţe ale unor inegalităţi energetice de tipul lui (3.1.12).

c) În sfîrşit, în cadrul teoremei variaţionale a lui Langenbach ipotezele:

a) M^0, M sînt mulţimi liniare dense în $H(\Omega)$; $P : M \to H(\Omega)$;

b) $(DP)(u) \cdot h$ există pentru orice $u \in M$, $h \in M$, liniară cu h şi continuă cu u în orice hiperplan bidimensional ce trece prin u;

c) $\langle (DP)(u) \cdot h, h \rangle_{H(\Omega)} > 0$ oricare ar fi $u \in M$, $h \in M^0$, $h \neq \theta$ au permis obţinerea formulei

$$\langle Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 \rangle =$$

$$= \int_0^1 \langle (DP)(tu_1 + (1-t)u_2) \cdot (u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle_{H)\Omega)} dt \qquad (3.1.13)$$

adevărată pentru orice u_1, $u_2 \in M$.

Pentru u_1, $u_2 \in M^0$, utilizînd ipoteza c), rezultă evident

$$\langle Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 \rangle > 0, \qquad u_1 \neq u_2 \qquad (3.1.14)$$

care arată că P este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe M^0. Este un caz în care stricta monotonie în sensul lui Minty-Browder este o consecinţă a faptului că P este diferenţiabil cu diferenţială liniară după Gâteaux şi pozitivă. Iată cîteva exemple de operatori monotoni care au apărut în mod natural în consideraţiile anterioare. Scopul capitolului este de a da cele mai importante teoreme referitoare la teoria operatorilor monotoni în sensul definiţiei 3.1.1, teoreme ce se vor dovedi deosebit de utile în obţinerea unor teoreme de existenţă pentru probleme ale teoriei de plasticitate a lui Hencky-Nadai.

§ 3.2. Teorema de surjectivitate a lui Browder [15 h]

Scopul acestui paragraf este demonstrarea următoarei teoreme de surjectivitate, datorată lui Browder:

TEOREMA 3.2.1. *Fie T o aplicaţie a unui spaţiu Banach reflexiv şi real X în dualul său X^*, astfel încît următoarele condiţii să fie îndeplinite:*

$$\begin{aligned} &1^\circ\ T \text{ este hemicontinuă în } X;\\ &2^\circ\ T \text{ este monotonă};\\ &3^\circ\ \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \to \infty \text{ cînd } \|u\| \to \infty. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Atunci T este surjectivă, adică $T(X) = X^*$.

Este, evident, o teoremă de existenţă : în condiţiile teoremei 3.2.1, ecuaţia $Tu = f$ are soluţie oricare ar fi $f \in X^*$. De remarcat că ipotezele :

2° T este monotonă,

3° $\dfrac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \to \infty$, $\|u\| \to \infty$, înlocuiesc inegalitatea lui Gårding.

Această teoremă arată încă odată că teoremele de existenţă corespunzătoare cazului liniar nu ţin în mod esenţial de liniaritate, ci mai ales de anumite inegalităţi de tip energetic.

Conţinutul primei ipoteze din teorema de surjectivitate a lui Browder este dat de următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 3.2.1. Fie X un spaţiu Banach şi $\mathcal{D}(T)$ un domeniu dens al lui X. O aplicaţie

$$T : \mathcal{D}(T) \to X^*$$

se zice hemicontinuă în $\mathcal{D}(T)$ dacă restricţia sa la orice segment închis este continuă în topologia slabă din X^*, adică

$$\lim_{t\to 0} \langle T(u_0 + tv_0),\ x\rangle = \langle Tu_0,\ x\rangle \tag{3.2.2}$$

oricare ar fi $x \in X$, u_0, $v_0 \in \mathcal{D}(T)$.

Demonstrarea teoremei de surjectivitate a lui Browder necesită o serie de leme pregătitoare.

LEMA 3.2.1. *Fie X un spaţiu Banach, X^* dualul său, T o aplicaţie hemicontinuă a unui domeniu $\mathcal{D}(T)$, dens în X, cu valori în X^*. Fie $u_0 \in \mathcal{D}(T)$, $w_0 \in X^*$. Dacă pentru orice $u \in \mathcal{D}(T)$,*

$$\langle Tu - w_0,\ u - u_0\rangle \geqslant 0, \tag{3.2.3}$$

atunci

$$Tu_0 = w_0. \tag{3.2.4}$$

Demonstraţie. Fie v arbitrar în $\mathcal{D}(T)$ şi să punem

$$u_t = u_0 + tv$$

cu $t > 0$. În virtutea ipotezei (3.2.3) făcută asupra lui T şi a liniarităţii lui $\mathcal{D}(T)$, avem

$$\langle Tu_t - w_0,\ u_t - u_0\rangle \geqslant 0$$

de unde

$$t\langle Tu_t - w_0,\ v\rangle \geqslant 0$$

pentru orice $t > 0$, de unde

$$\langle Tu_t - w_0, v\rangle \geqslant 0 \tag{3.2.5}$$

pentru orice $t > 0$.

Din (3.2.5) urmează

$$\langle Tu_t, v\rangle \geqslant \langle w_0, v\rangle$$

pentru orice $t > 0$, de unde prin trecere la limită cu $t \to 0$, și ținînd seama de hemicontinuitatea lui T, rezultă

$$\langle Tu_0,\ v\rangle \geqslant \langle w_0, v\rangle$$

sau

$$\langle Tu_0 - w_0, v\rangle \geqslant 0 \tag{3.2.6}$$

pentru orice $v \in \mathcal{D}(T)$.

Cu un raționament analog, dar schimbînd pe v cu $-v$, se obține inegalitatea contrară lui (3.2.6) și anume

$$\langle Tu_0 - w_0,\ v\rangle \leqslant 0. \tag{3.2.7}$$

Din (3.2.6) și (3.2.7) rezultă

$$\langle Tu_0 - w_0, v\rangle = 0 \tag{3.2.8}$$

și cum v este arbitrar în $\mathcal{D}(T)$, dens în X, din (3.2.8) urmează

$$Tu_0 = w_0,$$

ceea ce demonstrează lema.

LEMA 3.2.2. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și fie $T : X \to X^*$ o aplicație monotonă, hemicontinuă și mărginită (transformă mulțimile mărginite în mulțimi mărginite).*

Atunci, dacă $u_n \to u_0$ în X,

$$Tu_n \xrightarrow{\text{slab}} Tu_0 \text{ în } X^*.$$

Demonstrație. Fie $u_n \to u_0$ în X. Atunci $\{u_n\}$ este o mulțime mărginită și, conform ipotezei, $\{Tu_n\}$ este mărginită în X^*. Cum X^* este reflexiv, deci cu sferă slab compactă, din Tu_n se poate extrage un subșir Tu_{n_j} slab convergent, a cărui limită fie w_0,

$$Tu_{n_j} \xrightarrow{\text{slab}} w_0. \tag{3.2.9}$$

Datorită monotoniei lui T avem, oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(T) = X$,

$$\langle Tu_{n_j} - Tu, u_{n_j} - u \rangle \geqslant 0. \tag{3.2.10}$$

Din (3.2.10), trecînd la limită cu $j \to \infty$ şi ţinînd seama de (3.2.9), rezultă

$$\langle w_0 - Tu, u_0 - u \rangle \geqslant 0 \tag{3.2.11}$$

din care, aplicînd lema 3.2.1, rezultă

$$Tu_0 = w_0 \text{ şi deci } Tu_{n_j} \xrightarrow{\text{slab}} Tu_0. \tag{3.2.12}$$

Raţionamentul de mai sus poate fi făcut pentru orice subşir slab convergent al lui Tu_n, deci orice subşir slab convergent al lui Tu_n are limita Tu_0.

Să demonstrăm acum că $Tu_n \xrightarrow{\text{slab}} Tu_0$. Să presupunem că n-ar fi aşa. Să presupunem deci că există un element $u \in X$ astfel încît

$$\langle Tu_n - Tu_0, u \rangle \nrightarrow 0. \tag{3.2.13}$$

Există deci un $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît, oricare ar fi $k \in N$, există n_k astfel încît

$$|\langle Tu_{n_k} - Tu_0, u \rangle| > \varepsilon_0. \tag{3.2.14}$$

Această ultimă inegalitate arată că nici un subşir al lui $\langle Tu_{n_k}, u \rangle$ nu converge la $\langle Tu_0, u \rangle$.

Dar Tu_{n_k} este un subşir al lui Tu_n care este mărginit, deci Tu_{n_k} însuşi este mărginit. Şirul Tu_{n_k} fiind mărginit şi X^* fiind reflexiv, Tu_{n_k} conţine un subşir slab convergent, fie el $Tu_{n_{k_l}}$. Dar avem evident

$$\{Tu_{n_{k_l}}\} \subset \{Tu_{n_k}\} \subset \{Tu_n\}$$

şi după cum am remarcat deja, orice subşir slab convergent al lui Tu_n are limita Tu_0.

Aşadar,

$$Tu_{n_{k_l}} \xrightarrow{\text{slab}} Tu_0 \tag{3.2.15}$$

Din (3.2.15) rezultă că oricare ar fi elementul lui X, în particular chiar pentru u, avem

$$\langle Tu_{n_{k_l}}, u \rangle \to \langle Tu_0, u \rangle \tag{3.2.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultat care contrazice (3.2.14) din care, cum am mai spus, rezultă că nici un subșir al lui $\langle Tu_{n_k}, u\rangle$ nu converge la $\langle Tu_0, u\rangle$.

Lema este demonstrată.

LEMA 3.2.3. *Fie X de dimensiune finită și T o aplicație monotonă a lui X în X^*, continuă pe orice segment închis din X. Atunci T este continuă.*

Demonstrație. Vom arăta că T aplică orice mulțime mărginită din X într-o mulțime mărginită din X^*. Va fi suficient apoi să aplicăm lema 3.2.2.

Să presupunem că în condițiile lemei 3.2.3, T n-ar aplica orice mulțime mărginită din X într-una mărginită în X^*.

Fie așadar că există o mulțime mărginită $K \subset X$, pentru care $T(K)$ nu este mărginită în X^*.

Așadar, oricare ar fi n natural, există $y_n \in T(K)$ astfel încît $\|y_n\| > n$. Dar, oricare ar fi $y_n \in T(K)$, există $v_n \in K$ astfel încît $y_n = Tv_n$. Așadar, presupunerea că $T(K)$ n-ar fi mărginită, conduce la concluzia că există $v_n \in K$, K mărginită, dar pentru care $\|Tv_n\| \to \infty$ cu $n \to \infty$. Dar șirul v_n fiind mărginit și X de dimensiune finită, v_n conține un subșir v_{n_k} convergent la o limită v. Bineînțeles, $\|Tv_{n_k}\| \to \infty$, $k \to \infty$. În virtutea monotoniei lui T, pentru orice $u \in X$ avem

$$\langle Tv_{n_k} - Tu,\ v_{n_k} - u\rangle \geqslant 0. \tag{3.2.17}$$

Să punem $y_{n_k} = \dfrac{Tv_{n_k}}{\|Tv_{n_k}\|}$. Din faptul că $\|Tv_{n_k}\| \to \infty$, $k \to \infty$, rezultă existența unui rang k_0 astfel încît oricare ar fi $k > k_0$, $\|Tv_{n_k}\| > 0$ și deci y_{n_k} are sens pentru $k > k_0$. Din șirul y_{n_k} care este un șir al sferei unitate, compactă în X, se poate extrage un subșir $y_{n_{k_i}}$ convergent, a cărui limită y satisface de asemenea la $\|y\| = 1$.

Din (3.2.17) urmează, pentru $k > k_0$:

$$\frac{1}{\|Tv_{n_k}\|}\langle Tv_{n_k} - Tu,\ v_{n_k} - u\rangle \geqslant 0 \tag{3.2.17'}$$

sau

$$\left\langle y_{n_k} - \frac{Tu}{\|Tv_{n_k}\|},\ v_{n_k} - u\right\rangle \geqslant 0,$$

de unde

$$\left\langle y_{n_{k_i}} - \frac{Tu}{\|Tv_{n_{k_i}}\|},\ v_{n_{k_i}} - u\right\rangle \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecînd la limită în această ultimă inegalitate cu $l \to \infty$ şi ţinînd seama că

$$\lim_{l\to\infty} \left\langle \frac{Tu}{\| Tv_{n_{k_l}} \|}, v_{n_{k_l}} - u \right\rangle = \lim_{l\to\infty} \frac{\langle Tu, v_{n_{k_l}} - u\rangle}{\| Tv_{n_{k_l}} \|} = 0$$

rezultă

$$\lim_{l\to\infty} \langle y_{n_{k_l}}, v_{n_{k_l}} - u\rangle \geqslant 0$$

sau

$$\langle y, v - u\rangle \geqslant 0 \tag{3.2.18}$$

Dar, cînd u parcurge X, $v-u$ parcurge de asemenea X şi deci ultima inegalitate poate fi scrisă

$$\langle y, x\rangle \geqslant 0, \ x \in X. \tag{3.2.19}$$

Exact cu acelaşi raţionament dar scriind în loc de inegalitatea (3.2.17′) inegalitatea, evidentă în virtutea monotoniei lui T,

$$\frac{1}{\| Tv_{n_k} \|} \langle Tv_{n_k} - Tu, u - v_{n_k}\rangle \leqslant 0$$

se obţine inegalitatea contrară lui (3.2.18), deci inegalitatea contrară lui (3.2.19), de unde

$$y = \theta_{X^*},$$

adică $\|y\| = 0$, ceea ce contrazice faptul că $\|y\| = 1$. Dacă la ipotezele lemei 3.2.3 se adaugă ceea ce am obţinut în prima parte a demonstraţiei anume că T transformă mulţimile mărginite din X în mulţimi mărginite în X^*, se obţin exact ipotezele lemei 3.2.2 şi deci, în conformitate cu această lemă, oricare ar fi şirul

$$v_n \to v \ , \text{ în } X,$$

avem

$$Tv_n \xrightarrow{\text{slab}} Tv \text{ în } X^*,$$

la care, dacă se adaugă faptul că X este de dimensiune finită, rezultă că lema 3.2.3 este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 3.2.4. *Dacă T este o aplicație continuă a unui spațiu de dimensiune finită X la dualul său X^* și dacă*

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \to \infty \text{ cînd } \|u\| \to \infty, \tag{3.2.20}$$

atunci T este surjectivă : $T(X) = X^*$ [1]).

Demonstrație. Trebuie arătat că, în condițiile lemei 3.2.4, oricare ar fi $w \in X^*$, există $u \in X$, astfel încît $Tu = w$, sau că ecuația

$$T_w u = \theta_{X^*}$$

are soluție, unde, pentru fiecare $w \in X^*$, T_w este operatorul definit pe X după cum urmează

$$u \in X,\ u \xrightarrow{T_w} T_w u = Tu - w \in X^*. \tag{3.2.21}$$

Vom demonstra că operatorul T_w satisface la condițiile lemei 3.2.4, dacă T le satisface.

Într-adevăr, dacă T este continuu, atunci T_w este de asemenea continuu, ceea ce este evident din (3.2.21).

De asemenea, avem

$$\frac{\langle T_w, u, u\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle Tu, u\rangle - \langle w, u\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} - \frac{\langle w, u\rangle}{\|u\|} \tag{3.2.22}$$

și cum

$$\langle w, u\rangle \leqslant \|w\|\,\|u\|$$

rezultă din (3.2.22) că

$$\frac{\langle T_w u, u\rangle}{\|u\|} \geqslant \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} - \|w\|$$

din care, ținînd seama de (3.2.20), rezultă

$$\frac{\langle T_w u, u\rangle}{\|u\|} \to \infty \text{ cînd } \|u\| \to \infty.$$

Operatorul T_w satisfăcînd toate condițiile lemei 3.2.4, a demonstra lema 3.2.4 revine la a demonstra că dacă un operator T aplică continuu

---

[1]) Considerat ca spațiu hilbertian cu produsul scalar $\langle \xi, \eta\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, X va fi identificat cu X^*.

un spaţiu de dimensiune finită X în dualul său X^* şi dacă este satisfăcută condiţia (3.2.20), atunci $\theta_{X^*} \in R(T)$, unde cu $R(T)$ am notat mulţimea valorilor lui T.

Fie

$$U = I - T, \tag{3.2.32}$$

unde I este identitatea pe X.

Pentru a demonstra că dacă T satisface condiţiile lemei 3.2.4, atunci există $u \in X$ astfel încît $Tu = \theta_{X^*}$ ($\theta_{X^*} \in R(T)$), este suficient să demonstrăm că există $u \in X$ astfel încît $Uu = u$, adică să demonstrăm că dacă T satisface condiţiile lemei (3.2.4), atunci U are un punct fix.

Vom dovedi că, într-adevăr, U are un punct fix.

Avem

$$\langle Uu, u\rangle = \langle u - Tu, u\rangle = \|u\|^2 - \langle Tu, u\rangle. \tag{3.2.24}$$

Cum însă $\dfrac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \to \infty$ cînd $\|u\| \to \infty$, există un număr $R > 0$, astfel încît, îndată ce $\|u\| \geqslant R$, $\langle Tu, u\rangle \geqslant 0$.

Pentru toţi $u \in X$ cu $\|u\| \geqslant R$, din (3.2.24) rezultă

$$\langle Uu, u\rangle \leqslant \|u\|^2. \tag{3.2.25}$$

Să considerăm în X bula închisă centrată în origine şi de rază R, fie ea $B'(\theta_x; R)$ şi fie următoarele mulţimi

$$A = \{u/u \in B'(\theta_x, R), \|Uu\| > R\},$$
$$B = \{u/u \in B'(\theta_x, R), \|Uu\| \leqslant R\}.$$

Din modul cum a fost definită B, rezultă că $U(B) \subset B'(\theta_x; R)$. Cum $A \subset B'(\theta_X, R)$, din continuitatea lui U rezultă că $U(A) = A'$ este de asemenea mărginită, deci există o bulă închisă $B'(\theta_x, R')$ care conţine atît pe $U(A)$ cît şi pe $B'(\theta_x, R)$. Fie $U' : X \to X^*$ după cum urmează

$$U'u = \begin{cases} Uu & \text{dacă } \|Uu\| \leqslant R', \\ \dfrac{Uu}{\|Uu\|} R' & \text{dacă } \|Uu\| > R'. \end{cases} \tag{3.2.26}$$

Operatorul U' aplică spaţiul întreg în $B'(\theta_x; R')$ deci restricţia lui la $B'(\theta_x; R')$ aplică $B'(\theta_x; R')$ în $B'(\theta_x; R')$. Cum din continuitatea lui U rezultă continuitatea lui U', în conformitate cu teorema lui Brouwer (vezi mai departe teorema (4.5.4)), U' are un punct fix.

Scanned with OKEN Scanner

Există deci $u_0 \in B'(\theta_X, R')$ astfel încît $U'u_0 = u_0$.

Vom arăta că u_0 este punct fix pentru U.

Există următoarele situații:

a) $u_0 \in A$ și deci $Uu_0 \in A'$, $\|Uu_0\| \leqslant R'$, deci $U'u_0 = Uu_0 = u_0$.

b) $u_0 \in B$ și deci $Uu_0 \in B'(\theta_X, R)$, $\|Uu_0\| \leqslant R < R'$, deci $U'u_0 = Uu_0 = u_0$.

c) $u_0 \in B'(\theta_X, R')$, fără să aparțină lui A sau lui B. Atunci, $R < \|u_0\| \leqslant R'$. Pentru Uu_0 avem sau $\|Uu_0\| \leqslant R'$ și deci $U'u_0 = Uu_0 = u_0$, sau $\|Uu_0\| > R'$. În acest al doilea caz însă, din modul cum este definit U', rezultă

$$U'u_0 = \lambda Uu_0 \text{ cu } \lambda = \frac{R'}{\|Uu_0\|} < 1.$$

Avem deci

$$\langle U'u_0, u_0\rangle = \langle u_0, u_0\rangle = \lambda \langle Uu_0, u_0\rangle$$

de unde

$$\langle Uu_0, u_0\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle u_0, u_0\rangle > \langle u_0, u_0\rangle. \tag{3.2.27}$$

Pe de altă parte, cum $\|u_0\| > R$, este valabilă și (3.2.25), adică

$$\langle Uu_0, u_0\rangle \leqslant \|u_0\|^2$$

ceea ce contrazice însă pe (3.2.27).

Cazul $\|Uu_0\| > R'$ nu este deci posibil și cum în toate celelalte cazuri am demonstrat că u_0 este punct fix pentru U, demonstrația este încheiată.

Sîntem acum în măsură să trecem la demonstrarea teoremei de surjectivitate a lui Browder (teorema 3.2.1).

După un raționament în totul analog celui făcut la lema 3.2.4, chestiunea se reduce la a demonstra că $\theta_{X^*} \in R(T)$, deci că există $u_0 \in X$ astfel încît $Tu_0 = \theta_{X^*}$

Fie

$$c(r) = \inf_{\substack{u \in X \\ \|u\| = r}} \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|}. \tag{3.2.28}$$

În conformitate cu ipoteza 3° a teoremei 3.2.1, $c(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$ și avem pentru orice $u \in X$,

$$\langle Tu, u\rangle \geqslant c(\|u\|)\,\|u\|. \tag{3.2.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie, într-adevăr, $u \in X$. Avem, evident,

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \geqslant \inf_{\substack{v \in X \\ \|v\| = \|u\|}} \frac{\langle Tv, v\rangle}{\|v\|} = \sigma(\|u\|),$$

din care rezultă (3.2.29).

Fie Λ familia tuturor subspaţiilor F de dimensiune finită ale lui X; ordonată prin incluziune, Λ este o mulţime filtrantă. Pentru un F oarecare din Λ, fie J_F injecţia naturală a lui F în X şi fie $J_F^* : X^* \to F^*$ adjuncta lui J_F definită astfel: oricare ar fi $v^* \in X^*$,

$$v^* \xrightarrow{J_F^*} J_F^*(v^*) \in F^*,$$

unde $J_F^*(v^*)$ este funcţionala liniară şi mărginită pe F definită după cum urmează

$$[J_F^*(v^*)](u) = v^*(J_F u) = v^*(u) \tag{3.2.30}$$

oricare ar fi $u \in F$.

Relaţia (3.2.30) va fi scrisă adesea astfel:

$$\langle J_F^*(v^*), u\rangle = \langle v^*, J_F u\rangle = \langle v^*, u\rangle. \tag{3.2.31}$$

Pentru un F arbitrar din Λ, fie T_F aplicaţia lui F în F^* definită de

$$T_F = J_F^* \circ T \circ J_F. \tag{3.2.32}$$

Despre operatorul T_F vom demonstra că satisface condiţiile lemelor 3.2.3, 3.2.4. Într-adevăr,

1) T_F este o aplicaţie hemicontinuă a lui F în F^*.

Fie u, v două puncte arbitrare din F. Ţinînd seama de (3.2.31) şi (3.2.32) rezultă

$$\langle T_F u, v\rangle = \langle J_F^*(T(J_F u)), v\rangle = \langle J_F^*(Tu), v\rangle = \langle Tu, J_F v\rangle = \langle Tu, v\rangle$$

Aşadar, oricare ar fi $u, v \in F$, avem

$$\langle T_F u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle \tag{3.2.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

care arată că T_F este continuă pe segmentele închise ale lui F în topologia slabă din F^* căci $F \subset X$ și T are proprietatea respectivă pe X:

$$\lim_{t\to 0} \langle T_F(u_0 + tw_0),\ v\rangle = \lim_{t\to 0} \langle T(u_0 + tw_0),\ v\rangle =$$

$$= \langle Tu_0,\ v\rangle = \langle T_F u_0, v\rangle,$$

oricare ar fi u_0, w_0, v din F

2) T_F este monoton.

Într-adevăr, ținînd seama de (3.2.33) rezultă imediat

$$\langle T_F u - T_F v,\ u - v\rangle = \langle Tu - Tv,\ u - v\rangle \tag{3.2.34}$$

care demonstrează afirmația.

3) $\dfrac{\langle T_F u,\ u\rangle}{\|u\|} \to \infty$ cînd $\|u\| \to \infty$.

Într-adevăr, din (3.2.33) și (3.2.29) rezultă

$$\frac{\langle T_F u, u\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \geqslant c(\|u\|) \tag{3.2.35}$$

și este suficient să ținem seama că $c(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$. Subspațiul F fiind de dimensiune finită și $T_F : F \to F^*$ fiind monoton și hemicontinuu, T_F este continuu după lema 3.2.3.

Operatorul $T_F : F \to F^*$ fiind continuu pe F și satisfăcînd condiția

$$\frac{\langle T_F u, u\rangle}{\|u\|} \to \infty,\ \|u\| \to \infty,$$

rezultă după lema 3.2.4 existența cel puțin a unui punct $u_F \in F$, astfel ca

$$T_F u_F = \theta_{F^*}. \tag{3.2.36}$$

Din (3.2.36) și (3.2.35) rezultă

$$0 = \langle T_F u_F,\ u_F\rangle \geqslant c(\|u_F\|)\|u_F\| \tag{3.2.37}$$

de unde

$$c(\|u_F\|) \leqslant 0. \tag{3.2.38}$$

Cum însă $c(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$,

$$\{r/c(r) \leqslant 0\}$$

este mărginită. Există deci $M > 0$, astfel încît, oricare ar fi r pentru care $c(r) \leqslant 0$, avem $r \leqslant M$.

De aici rezultă că pentru toate punctele $u \in X$ pentru care $c(\|u\|) \leqslant 0$, avem $\|u\| \leqslant M$, deci toate punctele $u \in X$ ce au proprietatea $c(\|u\|) \leqslant 0$ sînt în bula închisă centrată în origine şi de rază M, fie ea $B'(\theta_x; M)$.

Ţinînd seama de (3.2.38) rezultă

$$u_F \in B'(\theta_x; M), \ (\|u_F\| \leqslant M). \tag{3.2.39}$$

Fie $F_0 \in \Lambda$ şi să considerăm toate subspaţiile F ale lui X care-l conţin pe F_0, $F \supset F_0$.

După cele arătate anterior, pentru fiecare F există cel puţin un $u_F \in F$ astfel încît $T_F u_F = \theta_{F^*}$ şi $u_F \in B'(\theta_x; M)$.

Fie

$$V_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \{u_F / T_F u_F = \theta_{F^*}\}.$$

Evident, $V_{F_0} \subset B'(\theta_x; M)$.

Fie $\overline{V}_{F_0}$ închiderea slabă a lui V_{F_0}. Este evident că familia $\{\overline{V}_{F_0}\}$ are proprietatea intersecţiei finite. Spaţiul X fiind reflexiv, bula $B(\theta_x; M)$ este slab compactă şi deci $\bigcap_{F_0 \in \Lambda} \overline{V}_{F_0}$ nu este vidă, conţinînd cel puţin un element, fie el u_0.

Vom dovedi că $Tu_0 = \theta_{X^*}$.

Fie $u \in X$ şi fie $F_0 \in \Lambda$, $F_0 \ni u$. Fie de asemenea $u_F \in V_{F_0}$ adică $u_F \in F$, $F \supset F_0$, $T_F u_F = \theta_{F^*}$.

Cum T este monoton, avem

$$0 \leqslant \langle Tu_F - Tu, \ u_F - u \rangle = \langle Tu_F, \ u_F - u \rangle - \langle Tu, u_F - u \rangle.$$

Ţinînd seama însă de (3.2.33), avem

$$\langle Tu_F, \ u_F - u \rangle = \langle T_F u_F, \ u_F - u \rangle = 0$$

astfel că, în definitiv, obţinem

$$\langle Tu, u - u_F \rangle \geqslant 0. \tag{3.2.40}$$

Însă $u_0 \in \overline{V}_{F_0}$. Există deci un șir de elemente din V_{F_0} convergent slab la u_0. Cum pentru fiecare element al acestui șir este valabilă (3.2.40), rezultă, evident, că aceeași inegalitate este valabilă pentru limita sa slabă, deci

$$< Tu, u - u_0 > \geqslant 0 \tag{3.2.41}$$

din care, dacă ținem seama de lema 3.2.1 în care $w_0 = \theta_{X^*}$, $\mathcal{D}(T) = X$, rezultă

$$Tu_0 = \theta_{X^*}.$$

Teorema este demonstrată.

§ 3.3. Teoreme de punct fix pentru operatori neexpansivi [15 h]

Unele dintre aceste teoreme sînt consecințe imediate ale teoremei de surjectivitate demonstrată anterior.

TEOREMA 3.3.1. *Fie H un spațiu hilbertian real și $C \subset H$. Fie $U : C \to H$. Vom nota cu $\dot{C}$ frontiera lui C. Fie că*

1° *C este convexă, mărginită și închisă;*

2° *$\|Uu - Uv\| \leqslant \|u - v\|$ oricare ar fi $u, v \in C$;*

3° *$U(\dot{C}) \subset C$;*

Atunci U are un punct fix $u_0 \in C$.

Pentru demonstrație, este necesară

LEMA 3.3.1. *Dacă C este o mulțime convexă, mărginită și închisă a unui spațiu hilbertian real H, există o aplicație*

$$r : H \to C$$

astfel încît:

1° *$r(x) = x$, oricare ar fi $x \in C$;*

2° *$\|r(x) - r(y)\| \leqslant \|x - y\|$, oricare ar fi $x, y \in H$.* (3.3.1).

Demonstrație. Definim pe r după cum urmează: oricărui element $x \in H$, r îi asociază unicul element din C care realizează minimul distanței de la x la C:

$$x \xrightarrow{r} r(x) \in C, \quad \|x - r(x)\| = \min_{z \in C} \|x - z\|. \tag{3.3.2}$$

Este evident că pe C, r este aplicația identică.

Vom dovedi acum că r astfel construit satisface și inegalitatea (3.3.1), deci este operator neexpansiv pe H.

Scanned with OKEN Scanner

Fie x şi y două elemente arbitrare din H. În virtutea convexităţii lui C, segmentul $[r(x), r(y)]$ este conţinut în C. Fie, pe de altă parte, subspaţiul generat de $r(x)$ şi $r(y)$ (dreapta determinată de elementele $r(x)$ şi $r(y)$) şi fie x' şi y' proiecţiile ortogonale ale lui x respectiv y pe această dreaptă. Se poate demonstra că x' şi y' nu pot aparţine interiorul segmentului $[r(x), r(y)]$.

Fie că x' este „între" $r(x)$ şi $r(y)$, $x' \neq r(x)$, $x' \neq r(y)$. Atunci

$$\|x - x'\|^2 = \|x - r(x)\|^2 - \|r(x) - x'\|^2 < \|x - r(x)\|^2,$$

ceea ce contrazice faptul că $r(x)$ realizează $\min_{z \in C} \|x - z\|$. Analog se arată că y' nu poate fi „între" $r(x)$ şi $r(y)$, $y' \neq r(x)$, $y' \neq r(y)$. Aşadar x' şi y' sînt exterioare segmentului $[r(x), r(y)]$. Vom dovedi că x' nu poate fi „la dreapta" lui $r(y)$. Dacă ar fi aşa, atunci am avea

$$\|r(y) - x\|^2 = \|x - x'\|^2 + \|r(y) - x'\|^2,$$

$$\|r(x) - x\|^2 = \|x - x'\|^2 + \|r(x) - x'\|^2.$$

Cum

$$\|r(x) - x'\|^2 > \|r(y) - x'\|^2$$

din cele două relaţii de mai sus rezultă

$$\|r(y) - x\| < \|r(x) - x\|$$

ceea ce iarăşi contrazice definiţia lui r.

Analog, y' nu poate fi „la stînga" lui $r(x)$.

Aşadar, nu este posibilă decît situaţia x' la stînga lui $r(x)$, y' la dreapta lui $r(y)$ şi deci avem

$$\|r(x) - r(y)\| \leqslant \|x' - y'\| = \|P_{[r(x),\, r(y)]}(x - y)\| \leqslant \|x - y\|,$$

unde cu $P_{[r(x),\, r(y)]}$ am notat operatorul de proiecţie pe dreapta ce trece prin $r(x)$ şi $r(y)$ şi am ţinut seama că $\|P_{[r(x),\, r(y)]}\| \leqslant 1$.

Observaţie. În raţionamentele de mai sus a fost exclus cazul în care punctele x', y' ar coincide cu $r(x)$, $r(y)$, ambele sau numai unul dintre ele.

Dacă x' şi y' coincid cu $r(x)$, $r(y)$, (fără a presupune în mod obligatoriu că $x' \equiv r(x)$, $y' \equiv r(y)$), inegalitatea (3.3.1) rezultă astfel :

$$\|r(x) - r(y)\| = \|x' - y'\| = \|P_{[r(x),\, r(y)]}(x - y)\| \leqslant \|x - y\|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă doar $x' \equiv r(x)$, cum în conformitate cu raționamentul anterior y' nu poate fi „la stînga" lui $r(x)$, există următoarele posibilități: $y' \equiv r(y)$ (cazul de sus), sau $y' \equiv r(x)$, sau y' este interior lui $[r(x), r(y)]$, sau y' este la dreapta lui $r(y)$. Cazul y interior lui $[r(x), r(y)]$ este imposibil, iar în celelalte două cazuri rămase, inegalitatea este evidentă.

Vom trece acum la demonstrația teoremei 3.3.1.

Fie $U' = r \circ U \circ r : H \to C$. Este evident că U' este neexpansiv. Avem, într-adevăr:

$$\| U'x - U'y \| = \| r(U(r(x))) - r(U(r(y))) \| \leqslant \| U(r(x)) - U(r(y)) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| r(x) - r(y) \| \leqslant \| x - y \|, \tag{3.3.3}$$

unde am ținut seama atît de ipoteza 2° formulată asupra lui U în teorema 3.3.1, cît și de proprietatea (3.3.1) a lui r.

Fiind neexpansiv, U' este evident continuu.

Punem

$$T = I - U'. \tag{3.3.4}$$

Aplicația T are următoarele proprietăți:

a) T este monotonă. Într-adevăr, avem:

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle = \langle (u - U'u) - (v - U'v), u - v \rangle =$$

$$= \| u - v \|^2 - \langle U'u - U'v, u - v \rangle. \tag{3.3.5}$$

Ținînd însă seama de (3.3.3) obținem

$$\langle U'u - U'v, u - v \rangle \leqslant \| U'u - U'v \| \, \| u - v \| \leqslant \| u - v \|^2. \tag{3.3.6}$$

Din (3.3.6) și (3.3.5) rezultă

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geqslant 0. \tag{3.3.7}$$

b) $\dfrac{\langle Tu, u \rangle}{\| u \|} \to \infty$ cînd $\| u \| \to \infty$;

Într-adevăr, deoarece $U' : H \to C$, $U'u \in C$ oricare ar fi $u \in H$. Cum C este mărginită prin ipoteză, există o constantă $M > 0$, astfel încît $\| U'u \| \leqslant M$, oricare ar fi $u \in H$.

De aici rezultă :

$$\frac{\langle Tu,\ u\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle u, u\rangle - \langle U'u, u\rangle}{\|u\|} \geqslant \frac{\langle u, u\rangle - |\langle U'u, u\rangle|}{\|u\|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\|u\|^2 - \|U'u\|\,\|u\|}{\|u\|} \geqslant \frac{\|u\|^2 - M\|u\|}{\|u\|}$$

care arată că $\dfrac{\langle Tu,\ u\rangle}{\|u\|} \to \infty$ cînd $\|u\| \to \infty$.

În concluzie, T verifică ipotezele teoremei (3.2.1) şi deci există, în conformitate cu această teoremă, un element $u_0 \in H$, astfel încît

$$Tu_0 = \theta_H$$

adică astfel încît

$$U'u_0 = u_0. \tag{3.3.8}$$

Cum $U' : H \to C$, $u_0 = U'u_0 \in C$.

Vom dovedi că u_0 este punct fix pentru U.

Fie că $u_0 \in \dot{C}$, frontiera lui C, care prin ipoteză este presupusă închisă. Ţinînd seama că, prin ipoteză, $U(\dot{C}) \subset C$, şi de faptul că pe C, r este aplicaţia identică, avem

$$u_0 = U'u_0 = r(U(r(u_0))) = r(Uu_0) = Uu_0$$

deci u_0 este punct fix pentru U.

Fie că u_0 este punct interior lui C, $u_0 \in \overset{\circ}{C}$.

Atunci avem

$$u_0 = U'u_0 = r(U(r(u_0))) = r(Uu_0), \tag{3.3.9}$$

unde am ţinut seama că pe C, r este identitatea.

În (3.3.9), Uu_0 poate fi în următoarele ipoteze :

a) $Uu_0 \in \dot{C}$; atunci $r(Uu_0) = Uu_0$ şi din (3.3.9) rezultă $Uu_0 = u_0$. Aşadar, $u_0 = Uu_0 \in \dot{C}$, ceea ce contrazice presupunerea $u_0 \in \overset{\circ}{C}$.

b) $Uu_0 \in \overset{\circ}{C}$, caz în care din (3.9) rezultă

$$u_0 = Uu_0$$

c) $Uu_0 \in H - C$, caz care conduce la contradicție, căci atunci din (3.3.9) rezultă $U'u_0 = u_0 \in \dot{C}$, contrar presupunerii $u_0 \in \overset{\circ}{C}$. Așadar, singurul caz posibil este b), deci u_0 este punct fix pentru U și teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA 3.3.1. Fie X un spațiu Banach. Se spune că X este *uniform convex* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi $u, v \in X$, cu

$$\|u\| = \|v\| = 1 \quad \text{și} \quad \|u - v\| \geqslant \varepsilon \tag{3.3.10}$$

avem

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta(\varepsilon). \tag{3.3.11}$$

Un spațiu uniform convex este reflexiv, după un rezultat al lui Milman, rezultat citat de Browder în [15 h].

TEOREMA 3.3.2. (Browder). *Fie X un spațiu Banach uniform convex, C o mulțime convexă, mărginită și închisă a lui X și U o aplicație neexpansivă a lui C în C. Atunci, U are un punct fix.*

Demonstrație. Fie Φ familia tuturor submulțimilor închise, convexe și nevide ale lui C care sînt invariante la U. Așadar, $C_1 \in \Phi$ înseamnă $C_1 \subset C$, C_1 convexă, închisă, nevidă și $U(C_1) \subset C_1$. Introducem pe Φ următoarea relație de ordine : vom spune că $C_1 < C_2$, dacă $C_1 \supset C_2$. Evident, Φ este nevidă căci din ipotezele teoremei 3.3.2 rezultă $C \in \Phi$. Cu relația de ordine mai sus introdusă, Φ este inductiv ordonată (orice familie total ordonată a sa admite un element maximal). Fie într-adevăr C_α, $\alpha \in A$, o asemenea familie total ordonată a lui Φ.

Vom dovedi că $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \in \Phi$. Dacă acest lucru va fi dovedit, cum $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \subset C_\alpha$, ținînd seama de modul cum a fost definită relația de ordine, rezultă că $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ este element maximal al familiei C_α, $\alpha \in A$.

Așadar, să demonstrăm că

$$\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \in \Phi.$$

Că $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ este închisă și convexă este evident, fiind o intersecție de mulțimi închise și convexe.

Că $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ este nevidă este de asemenea evident, căci este intersecția unei familii ordonată prin incluziune de mulțimi convexe, mărginite și închise ale unui spațiu Banach reflexiv, deci intersecția unei familii ordonată prin incluziune de mulțimi slab închise ale unui spațiu Banach reflexiv, deci cu sferă slab compactă. Se știe atunci că o asemenea inter-

secţie este nevidă. În sfîrşit, $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ este invariantă la U căci avem

$$U(\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} (UC_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha,$$

unde am ţinut seama că $U(C_\alpha) \subset C_\alpha$.

Aşadar, familia Φ posedă un element maximal, fie el C_0. Să observăm că închiderea acoperirii convexe a lui $U(C_0)$ coincide cu C_0.

Într-adevăr, din $U(C_0) \subset C_0$, ţinînd seama că C_0 este convexă, rezultă că acoperirea convexă a lui $U(C_0)$ este de asemenea inclusă în C_0 : conv $U(C)_0 \subset C_0$, unde cu conv $U(C_0)$ am notat acoperirea convexă a lui $U(C_0)$. Cum C_0 este închisă, din

$$\text{conv } U(C_0) \subset C_0 \tag{3.3.12}$$

rezultă evident

$$\overline{\text{conv } U(C_0)} \subset C_0, \tag{3.3.13}$$

unde $\overline{\text{conv } U(C_0)}$ este închiderea lui conv $U(C_0)$.

Este uşor de dovedit că $\overline{\text{conv } U(C_0)} \in \Phi$.

Pe de altă parte, din (3.3.13) urmează

$$U(\overline{\text{conv } U(C_0)}) \subset U(C_0) \subset C_0. \tag{3.3.14}$$

Cum însă C_0 este elementul maximal al familiei Φ, ţinînd seama de modul cum este definită relaţia de ordine, rezultă că C_0 este inclusă în toate mulţimile familiei Φ, deci şi în $\overline{\text{conv } U(C_0)}$. Această observaţie cuplată cu (3.3.14) dă

$$\overline{\text{conv } U(C_0)} = C_0. \tag{3.3.15}$$

Pentru a încheia demonstraţia să arătăm că C_0 are un singur element.

Să presupunem că n-ar fi astfel şi fie d_0 diametrul lui C_0. Există două puncte x_1, $x_2 \in C_0$ astfel încît $\|x_1 - x_2\| \geqslant \frac{d_0}{2}$. Dacă $x \in C$ este mijlocul segmentului $[x_1, x_2]$, oricare ar fi $y \in C_0$, $x - y$ este mijlocul segmentului $[x_1 - y, x_2 - y]$. Avem evident

$$\|x_1 - y\| \leqslant d_0, \qquad \|x_2 - y\| \leqslant d_0$$

şi pe de altă parte

$$\|(x_1 - y) - (x_2 - y)\| = \|x_1 - x_2\| \geqslant \frac{d_0}{2},$$

Spațiul fiind uniform convex, există $\delta\left(\frac{d_0}{2}\right) > 0$ astfel încît

$$\|x - y\| \leqslant d_0 - \delta\left(\frac{d_0}{2}\right) = d_0(1 - q) = d_1. \tag{3.3.16}$$

Fie

$$C_2 = \bigcap_{v \in C_0} \{u/u \in C_0, \quad \|u - y\| \leqslant d_1\}. \tag{3.3.17}$$

Vom dovedi că $C_2 \in \Phi$.

Că C_2 este convexă și închisă, rezultă din faptul că este intersecție de asemenea mulțimi.

Este de asemenea evident că C_2 este nevidă, căci $x \in C_2$. Mulțimea C_2 este o parte proprie a lui C_0 căci $d_1 < d_0$. În sfîrșit, vom arăta că C_2 este invariantă la U. Cu aceasta vom dovedi că $C_2 \in \Phi$.

Fie, într-adevăr, $u \in C_2$. Vom dovedi că $Uu \in C_2$. Fie y un element arbitrar din C_0. În virtutea egalității (3.3.15), orice element din C_0 este limita unui șir de combinații convexe din $U(C_0)$. Așadar, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există elementele $z_j \in C_0$, $j = 1, \ldots, r$, și numerele λ_j, $j = 1, \ldots, r$, $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$, $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$, astfel încît

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U(z_j) \right\| < \varepsilon \tag{3.3.18}$$

Atunci, ținînd seama că U este neexpansiv, avem

$$\|Uu - y\| \leqslant \left\| Uu - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U_{z_j} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U_{z_j} - y \right\| <$$

$$< \left\| Uu - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U_{z_j} \right\| + \varepsilon = \left\| \sum_{j=1}^{r} \lambda_j Uu - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U_{z_j} \right\| + \varepsilon$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \| Uu - U_{z_j} \| + \varepsilon \leqslant \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \| u - z_j \| + \varepsilon$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{r} \lambda_j d_1 + \varepsilon = d_1 + \varepsilon$$

și cum ε este arbitrar, inegalitatea

$$\|Uu - y\| < d_1 + \varepsilon$$

pe care am demonstrat-o mai sus, cu $y \in C_0$ şi $u \in C_2$, arată că $Uu \in C_2$, deci C_2 este invariantă la U. Aşadar, $C_2 \in \Phi$.

Pe de altă parte, din modul în care a fost definită (vezi (3.3.17)), rezultă că

$$C_2 \subset C_0.$$

ceea ce contrazice faptul că C_0 este elementul maximal al familiei Φ pentru relaţia de ordine introdusă la începutul demonstraţiei. Contradicţia provine din presupunerea că C_0 ar conţine mai mult decît un singur element.

Aşadar, C_0 conţine un singur element, fie el u_0. Cum, pe de altă parte, C_0 este invariantă la U, rezultă

$$Uu_0 = u_0$$

şi teorema este demonstrată.

§ 3.4. Un exemplu de aplicaţie monotonă surjectivă : aplicaţia de dualitate [15 h], [10]

În acest paragraf, X este un spaţiu Banach real şi reflexiv, X^* este dualul lui X. Se va presupune că X şi X^* sînt strict convexe (vezi definiţia 1.1.).

Prin funcţie de normalizare, vom înţelege o funcţie numerică φ definită pe $0 \leqslant r < \infty$ şi avînd următoarele proprietăţi :

1) φ este continuă şi strict crescătoare ;

2) $\varphi(0) = 0$;

3) $\varphi(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$.

Am demonstrat (vezi § 1.1) că, în aceste ipoteze, există o aplicaţie $J : X \to X^*$, cu următoarele proprietăţi :

$$\langle Ju,\ u\rangle = \varphi(\|u\|)\,\|u\| \tag{3.4.1}$$

$$\|Ju\| = \varphi(\|u\|) \tag{3.4.2}$$

oricare ar fi $u \in X$.

Am demonstrat de asemenea că J astfel construită, satisface la

$$\langle Ju - Jv,\ u - v\rangle = (\varphi(\|u\|) - \varphi(\|v\|))\,(\|u\| - \|v\|) \geqslant 0$$

pentru orice $u, v \in X$, deci că este o aplicaţie monotonă pe X în sensul lui Minty-Browder.

Scanned with OKEN Scanner

Vom demonstra mai mult, că în ipotezele de mai sus, J este o aplicație surjectivă a lui X pe X^*. Acesta este rezultatul teoremei lui Beurling și Livingston (a se vedea [10] și [15 h]).

DEFINIȚIA 3.4.1. Fie X un spațiu vectorial normat. Dacă V este un subspațiu al lui X, vom numi *anihilatorul lui* V *și vom nota cu* $V^\perp$, următoarea mulțime

$$V^\perp = \{v^* \in X^*,\ \langle v^*,\ v\rangle = 0,\ \text{oricare ar fi } v \in V\} \tag{3.4.3}$$

TEOREMA 3.4.1 (Beurling-Livingston). *Fie X un spațiu Banach reflexiv și real și fie X^* dualul lui X. Fie că X și X^* sînt strict convexe. Fie V un subspațiu închis al lui X și $V^\perp$ anihilatorul său. Fie J aplicația de dualitate între X și X^* corespunzătoare funcției de normalizare φ.*

Dacă $x^0 \in X$, $y^0 \in X^*$ sînt două elemente arbitrare din X respectiv din X^*, mulțimea

$$J(V + x^0) \cap (V^\perp + y^0) \tag{3.4.4}$$

conține exact un element.

Înainte de a trece la demonstrație, să observăm că din teorema lui Beurling-Livingstone rezultă că $J(X) = X^*$.

Fie, într-adevăr, y^0 un element arbitrar din X^*, x^0 un element arbitrar din X și fie în teorema lui Beurling-Livingston $V = X$. Este evident atunci, că anihilatorul lui $V = X$ conține un singur element și anume elementul nul din X^*.

În acest caz, din teorema lui Beurling-Livingston rezultă că

$$J(X) \cap \{y^0\}$$

conține un element și numai unul.

Evident, acel element nu poate fi decît y^0.

Deci,

$$y^0 \in J(X)$$

și cum y^0 a fost ales arbitrar în X^*, rezultă că J este surjectivă.

Demonstrația teoremei 3.4.1 se bazează pe

LEMA 3.4.1. *În ipotezele teoremei* 3.4.1, *aplicația de dualitate este monotonă și continuă de la X înzestrat cu topologia tare la X^* înzestrat cu topologia slabă.*

Demonstrație. Faptul că J este o aplicație monotonă de la X la X^* a fost demonstrat în § 1.1.

Să demonstrăm partea a doua a lemei, deci că, oricare ar fi șirul u_n din X, $u_n \to u$ (în norma lui X), avem

$$Ju_n \xrightarrow{\text{slab}} Ju. \tag{3.4.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, din $u_n \to u$, rezultă $\|u_n\| \to \|u\|$ şi în baza continuităţii funcţiei de normalizare rezultă de asemenea $\varphi(\|u_n\|) \to \varphi(\|u\|)$. Însă

$$\|Ju_n\| = \varphi_n(\|u_n\|)$$

şi deci, din $u_n \to u$, rezultă

$$\|Ju_n\| \to \varphi(\|u\|). \tag{3.4.6}$$

Din (3.4.6), ţinînd seama că X^* este reflexiv, deci cu sferă slab compactă, rezultă că se poate presupune că

$$Ju_n \xrightarrow{\text{slab}} v \tag{3.4.7}$$

în X^* şi $\|v\| \leqslant \varphi(\|u\|)$.

Rămîne să dovedim că $v = Ju$.

Din $u_n \to u$ şi din $Ju_n \xrightarrow{\text{slab}} v$ în X^*, rezultă

$$\langle Ju_n,\ u_n\rangle \to \langle v,\ u\rangle. \tag{3.4.8}$$

Pe de altă parte,

$$\langle Ju_n,\ u_n\rangle = \varphi(\|u_n\|)\,\|u_n\| \to \varphi(\|u\|)\,\|u\|. \tag{3.4.9}$$

Din (3.4.8) şi (3.4.9) rezultă

$$\langle v,\ u\rangle = \varphi(\|u\|)\,\|u\|. \tag{3.4.10}$$

Cum însă

$$\langle v,\ u\rangle \leqslant \|v\|\,\|u\| \tag{3.4.11}$$

din (3.4.10) şi (3.4.11) avem

$$\varphi(\|u\|) \leqslant \|v\|.$$

Cum pe de altă parte

$$\varphi(\|u\|) \geqslant \|v\|$$

rezultă că

$$\|v\| = \varphi(\|u\|)$$

şi (3.4.10) se scrie

$$\langle v,\ u\rangle = \|v\|\,\|u\| = \varphi(\|u\|)\,\|u\| = \langle Ju,\ u\rangle$$

deci $v = Ju$ şi demonstraţia este încheiată.

Scanned with OKEN Scanner

Vom trece acum la

Demonstrația teoremei 3.4.1. Subspațiul V fiind un subspațiu închis al unui spațiu Banach reflexiv, este încă un spațiu Banach reflexiv (vezi [51]). Fie k injecția lui V în X și fie

$$k^* : X^* \to V^*$$

după cum urmează :

$$u^* \in X^*, \quad u^* \xrightarrow{k^*} (k^* u^*),$$

unde

$$(k^* u^*) : V \to R$$

după cum urmează :

$$x \in V, \quad (k^* u^*)(x) = u^*(kx) = u^*(x). \tag{3.4.12}$$

Cu alte cuvinte, prin k^* fiecărui element $u^* \in X^*$ îi corespunde restricția sa la V.

Așa fiind, este evident că aplicația k^* este surjectivă.

Fie, într-adevăr, $v^* \in V^*$. Există $u^* \in X^*$ astfel încît

$$(k^* u^*) = v^*.$$

Aceasta înseamnă să dovedim că există $u^* \in X$ astfel încît pentru orice $x \in V$ să avem

$$(k^* u^*)(x) = v^*(x)$$

sau

$$u^*(x) = v^*(x)$$

Este suficient să considerăm drept u^* extinderea la X a lui v^* dată de teorema Hahn-Banach.

Este de asemenea ușor de dovedit că aplicația k^* este slab continuă.

Fie $T : V \to V^*$ după cum urmează :

$$u \in V, \qquad u \xrightarrow{T} Tu = k^*[J(u + x^0) - y^0] \tag{3.4.13}$$

Vom dovedi că T astfel definit verifică ipotezele teoremei de surjectivitate a lui Browder (teorema 3.2.1).

a) T este monoton ;

Fie, într-adevăr, u, v două elemente arbitrare din V.

Utilizînd liniaritatea lui k^* rezultă :

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle = \langle k^*[J(u + x^0) - y^0] - k^*[J(v + x^0) - y^0],\ u - v\rangle$$

$$= \langle k^*[J(u + x^0) - J(v + v^0)],\ u - v\rangle$$

$$= \langle J(u + x^0) - J(v + x^0),\ u - v\rangle$$

$$= \langle J(u + x^0) - J(v + x^0),\ (u - x^0) - (v - x^0)\rangle \geqslant 0,$$

ultima inegalitate fiind consecinţă a faptului că J este monotonă.

b) T este o aplicaţie hemicontinuă a lui V în V^*.

Într-adevăr, oricare ar fi u, v din V şi x de asemenea arbitrar în V, avem

$$\langle T(u + tv), x\rangle = \langle k^*[J(u + tv + x^0) - y^0],\ x\rangle$$

$$= \langle J(u + tv + x^0) - y^0,\ x\rangle$$

şi este suficient să se ţină seama de faptul că, în conformitate cu lema 3.4.1, J este continuă de la X înzestrat cu topologia tare la X^* înzestrat cu topologia slabă.

c) $\dfrac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \to \infty$ cînd $\|u\| \to \infty$.

Într-adevăr, avem

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle k^*[J(u + x^0) - y^0], u\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle J(u + x^0) - y^0,\ u\rangle}{\|u\|} =$$

$$= \frac{\langle J(u + x^0) - y^0,\ (u + x^0) - x^0\rangle}{\|u\|} =$$

$$= \frac{\langle J(u + x^0),\ u + x^0\rangle - \langle J(u + x^0), x^0\rangle - \langle y^0, u\rangle}{\|u\|}, \qquad (3.4.14)$$

Evident, avem

$$\langle J(u+x^0), u+x^0\rangle = \varphi(\|u + x^0\|)\|u + x^0\|$$

$$|\langle y^0,\ u\rangle| \leqslant M\|u\| \qquad (3.4.15)$$

$$|\langle J(u + x^0),\ x^0\rangle| \leqslant M\|J(u + x^0)\| = M\varphi(\|u + x^0\|)$$

unde cu M s-a notat maximul între $\|x^0\|$ şi $\|y^0\|$.

Ținînd seama de inegalitățile din (3.4.15), din (3.4.14) rezultă

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \geqslant \frac{\varphi(\|u + x^0\|)\|u + x^0\| - |\langle J(u + x^0), x^0\rangle - |\langle y^0, u\rangle|}{\|u\|}$$

$$\geqslant \frac{\varphi(\|u + x^0\|)\|u + x^0\| - M\varphi(\|u + x^0\|) - M\|u\|}{\|u\|}. \quad (3.4.16)$$

Dar, din inegalitatea evidentă

$$|\|u + x^0\| - \|u\|| \leqslant \|x^0\|$$

rezultă

$$-\|x^0\| \leqslant \|u + x^0\| - \|u\| \leqslant \|x^0\|. \quad (3.4.17)$$

Din (3.4.17) rezultă

$$\|u + x^0\| \geqslant \|u\| - \|x^0\|$$

care arată că

$$\|u + x^0\| \to \infty \quad \text{cînd} \quad \|u\| \to \infty. \quad (3.4.18)$$

Tot din (3.4.17) rezultă

$$-\frac{\|x^0\|}{\|u\|} \leqslant \frac{\|u + x^0\|}{\|u\|} - 1 \leqslant \frac{\|x^0\|}{\|u\|}$$

care arată că

$$\frac{\|u + x^0\|}{\|u\|} \to 1 \quad \text{cînd} \quad \|u\| \to \infty. \quad (3.4.19)$$

Ținînd seama de (3.4.18) și (3.4.19) precum și de faptul că $\varphi(r) \to \infty$ cînd $r \to \infty$, rezultă că

$$\frac{\varphi(\|u + x^0\|)\|u + x^0\| - M\varphi(\|u + x^0\|) - M\|u\|}{\|u\|} \to \infty \quad \text{cînd} \quad \|u\| \to \infty,$$

iar în baza lui (3.4.16) rezultă și

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \to \infty \quad \text{cînd} \quad \|u\| \to \infty.$$

Aşadar, operatorul $T : V \to V^*$ prin (3.4.13), satisface condiţiile teoremei de surjectivitate a lui Browder. În consecinţă, elementul nul din V^* are acoperire prin T, adică $0_{V^*} \in \mathcal{R}(T)$, adică există $u \in V$ astfel încît

$$0_{V^*} = Tu$$

sau, ţinînd seama de definiţia lui T, există $u \in V$ astfel încît

$$0_{V^*} = k^*[J(u + x^0) - y^0] \tag{3.4.20}$$

deci astfel încît

$$k^*[J(u + x^0) - y^0](v) = \langle J(u + x^0) - y^0,\ v\rangle = 0 \tag{3.4.21}$$

oricare ar fi $v \in V$.

Egalitatea

$$\langle J(u + x^0) - y^0,\ v\rangle = 0$$

satisfăcută pentru orice $v \in V$ arată, însă, că

$$J(u + x^0) - y^0 \in V^{\perp}$$

deci că

$$J(u + x^0) \in (V^{\perp} + y^0)$$

Aşadar, intersecţia

$$J(V + x^0) \cap (V^{\perp} + y^0)$$

nu este vidă.

Rămîne să dovedim că această intersecţie conţine exact un element. Fie că ar exista două elemente u, u' în V astfel încît $J(u + x^0) - y^0$ şi $J(u' + x^0) - y^0$ să reprezinte două elemente distincte din $V^{\perp}$ deci astfel încît $J(u + x^0)$ şi $J(u' + x^0)$ să reprezinte două elemente distincte din $(V^{\perp} + y^0)$.

Atunci,

$$J(u + x^0) - J(u' + x^0) \in V^{\perp}$$

deci

$$\langle J(u + x^0) - J(u' + x^0),\ v\rangle = 0 \tag{3.4.22}$$

oricare ar fi $v \in V$.

În particular, pentru

$$v = (u + x^0) - (u' + x^0) = u - u' \in V,$$

(3.4.22) se scrie

$$\langle J(u + x^0) - J(u' + x^0),\ (u + x^0) - (u' + x^0)\rangle = 0,$$

Pe de altă parte, ținînd seama de inegalitatea (1.1.26), avem

$$0 = \langle J(u + x^0) - J(u' + x^0),\ (u + x^0) - (u' + x^0)\rangle$$

$$\geqslant (\varphi(\|u + x^0\|) - \varphi(\|u' + x^0\|))(\|u + x^0\| - \|u' + x^0\|) \geqslant 0,$$

din care se deduce

$$(\varphi(\|u + x^0\|) - \varphi(\|u' + x^0\|))(\|u + x^0\| - \|u' + x^0\|) = 0,$$

și cum φ este strict crescătoare, rezultă din această ultimă inegalitate că

$$\|u + x^0\| = \|u' + x^0\| \tag{3.4.23}$$

Ținînd seama de (3.4.23), putem scrie

$$0 = \langle J(u + x^0) - J(u' + x^0),\ (u + x^0) - (u' + x^0)\rangle =$$

$$= \langle J(u + x^0),\ u + x^0\rangle - \langle J(u + x^0),\ u' + x^0\rangle +$$

$$+ \langle J(u' + x^0),\ u' + x^0\rangle - \langle J(u' + x^0),\ u + x^0\rangle =$$

$$= \varphi(\|u + x^0\|)\|u + x^0\| - \langle J(u + x^0),\ u' + x^0\rangle +$$

$$+ \varphi(\|u' + x^0\|)\|u' + x^0\| - \langle J(u' + x^0),\ u + x^0\rangle =$$

$$= \{\|J(u + x^0)\|\,\|u' + x^0\| - \langle J(u + x^0),\ u' + x^0\rangle\} +$$

$$+ \{\|J(u' + x^0)\|\,\|u + x^0\| - \langle J(u' + x^0),\ u + x^0\rangle\}$$

Este însă evident că în ultima sumă, fiecare dintre termenii cuprinşi între paranteze este nenegativ şi, deci, egalitatea cu zero poate avea loc numai dacă

$$\langle J(u + x^0),\ u' + x^0\rangle = \|J(u + x^0)\|\|u' + x^0\|$$

$$\langle J(u' + x^0),\ u + x^0\rangle = \|J(u' + x^0)\|\|u + x^0\| =$$

$$= \varphi(\|u' + x^0\|)\|u + x^0\| = \varphi(\|u + x^0\|\|u + x^0\| =$$

$$= \langle J(u + x^0),\ u + x^0\rangle. \tag{3.4.24}$$

Aşadar, există două funcţionale liniare şi mărginite pe X, anume $J(u + x^0)$ şi $J(u' + x^0)$ care iau aceeaşi valoare în punctul $u + x^0$

$$\langle J(u + x^0),\ u + x^0\rangle = \langle J(u' + x^0),\ u + x^0\rangle = \varphi(\|u + x^0\|)\|u + x^0\|$$

şi care au aceeaşi normă,

$$\|J(u + x^0)\| = \|J(u' + x^0)\| = \varphi(\|u + x^0\|) = \varphi(\|u' + x^0\|).$$

La definirea aplicaţiei de dualitate, ţinînd seama că X^* este strict convex, s-a arătat că aceasta atrage

$$J(u + x^0) = J(u' + x^0) = w. \tag{3.4.25}$$

Ţinînd seama de (3.4.25), din (3.4.24) se obţine

$$\langle w,\ u + x^0\rangle = \|w\|\|u + x^0\|$$

$$\langle w, u' + x^0\rangle = \|w\|\|u' + x^0\|, \quad \|u + x^0\| = \|u' + x^0\|,$$

ceea ce, în baza faptului că X este strict convex, atrage $u + x^0 = u' + x^0$, deci $u = u'$ şi demonstraţia este încheiată.

Scanned with OKEN Scanner

Cîteva rezultate din teoria gradului topologic

Scopul acestui capitol este de a demonstra acele rezultate din teoria gradului topologic ce ne sînt necesare pentru a obţine teoreme de existenţă ale soluţiilor în sens clasic pentru unele probleme ale teoriei de plasticitate a lui Hencky-Nadai. Socotim necesară această precizare pentru că, după cum este bine cunoscut, teoria gradului este un capitol vast (şi dificil) al matematicilor moderne iar noi nu prezentăm aici decît acele rezultate ce sînt necesare pentru a înţelege rezultatele obţinute pentru ecuaţiile teoriei plasticităţii şi care, eventual, pot constitui o introducere în teoria gradului.

§ 4.1. Operatorul regularizant al lui Sobolev [59], [47 a]

Fie $E^{(m)}$ un spaţiu vectorial real de dimensiune m şi fie

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad x_i \in R, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4.1.1}$$

un punct generic al său.

Vom pune prin definiţie

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2}. \tag{4.1.2}$$

În tot acest capitol vom nota cu Ω o mulţime deschisă şi mărginită din $E^{(m)}$ a cărei frontieră $\dot{\Omega}$ va fi presupusă suficient de regulată. Cu $\bar{\Omega}$ se va nota aderenţa în $E^{(m)}$ a lui Ω. Evident, avem

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \dot{\Omega}, \qquad \dot{\Omega} = \bar{\Omega} \cap \complement\, \Omega.$$

O aplicaţie $y : \Omega \to E^{(m)}$,

$$x \in \Omega, \quad x \xrightarrow{y} y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x)) = (y_1, (x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_m))$$

se zice de clasă $C^{(k)}$ în Ω şi se notează $y \in C^{(k)}(\Omega)$, dacă y_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, posedă derivate parţiale pînă la ordinul k inclusiv, continue în Ω.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 4.1.1. Fie h un număr real strict pozitiv. Se numește *nucleu de medie* al lui Sobolev corespunzător lui h, funcția

$$\omega_h : E^{(m)} \times E^{(m)} \to R$$

care are următoarele proprietăți :

1° oricare ar fi $(x, y) \in E^{(m)} \times E^{(m)}$, $\omega_h(x, y)$ depinde numai de $r = \|x - y\|$;

2° $\omega_h(x, y) > 0$ dacă $\|x - y\| < h$ și $\omega_h(x, y) = 0$ dacă $\|x - y\| \geqslant h$;

3° ω_h este indefinit diferențiabilă ;

4° oricare ar fi $x \in E^{(m)}$,

$$\int_{\{v/v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, d\Omega_y = 1. \tag{4.1.3}$$

Ținînd seama de proprietățile 2° și 4° ale lui ω_h, rezultă imediat că dacă x este fixat în $E^{(m)}$ iar h este fixat în R^+, funcția φ definită după cum urmează

$$y \in E^{(m)}, \quad y \xrightarrow{\varphi} \omega_h(x, y), \tag{4.1.4}$$

are proprietatea

$$\int_{E^{(m)}} \varphi(y)\, d\Omega_y = 1. \tag{4.1.5}$$

Într-adevăr,

$$\int_{E^{(m)}} \varphi(y)\, d\Omega_y = \int_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \varphi(y)\, d\Omega_y + \int_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\| \geqslant h\}} \varphi(y)\, d\Omega_y =$$

$$= \int_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, d\Omega_y + \int_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\| \geqslant h\}} \omega_h(x, y)\, d\Omega_y =$$

$$= \int_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, d\Omega_y = 1.$$

Este de remarcat de asemenea că, deoarece $\omega_h(x, y)$ depinde numai de $r = \|x - y\|$, avem

$$\omega_h(x, y) = \omega_h(y, x) \tag{4.1.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

dar că această egalitate poate avea loc și în cazuri mai generale. Nuclee pentru care proprietatea 1° este înlocuită cu proprietatea de simetrie mai generală exprimată de (4.1.6) au fost studiate de Sobolev (a se vedea [59]).

Vom da un exemplu de nucleu de medie al lui Sobolev (a se vedea Mihlin [47 a]). Fie $h \in R^+$ și

$$\omega_h^* : E^{(m)} \times E^{(m)} \to R$$

după cum urmează

$$\omega_h^*(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} & \text{dacă } r < h \\ 0 & \text{dacă } r \geqslant h \end{cases} \tag{4.1.7}$$

unde $r = \| x - y \|$.

Este ușor de văzut că ω_h^* astfel definit are proprietățile 1°, 2° impuse de definiția nucleului de medie al lui Sobolev. În ceea ce privește proprietatea 3°, este suficient să remarcăm că prin inducție se deduce (vezi Sobolev [59])

$$\frac{\partial^\alpha e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}} = \frac{P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x_1, \dots, x_m)}{(r^2 - h^2)^{2\alpha}} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \alpha$$

unde $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ este un polinom în variabilele $x_1, \dots, x_m$, variabila x_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, apărînd la puterea α_k.

Așadar ω_h^* satisface toate condițiile ce definesc nucleul de medie al lui Sobolev, cu excepția condiției de normalizare 4°. Este suficient deci să definim ω_h punînd

$$\omega_h = \frac{1}{H_h} \omega_h^*,$$

unde

$$H_h(x) = \int_{\{y \in E^{(m)}, \, \|x-y\| < h\}} e^{-\frac{1}{h^2-r^2}} d\Omega_y = S_m \int_0^h r^{m-1} e^{-\frac{1}{h^2-r^2}} dr = \text{const.}$$

S_m fiind aria hipersferei de rază unitate în $E^{(m)}$.

Funcția ω_h astfel definită satisface și condiția de normalizare 4° și este un exemplu de nucleu de medie al lui Sobolev.

§ 4.2. Operatorul de medie al lui Sobolev [59], [47 a]

Fie $h \in R^+$ şi fie ω_h nucleul de medie al lui Sobolev corespunzător lui h.

DEFINIŢIA 4.2.1. Operatorul $\mathcal{M}_h$ care asociază fiecărei funcţii u sumabilă pe Ω funcţia $(\mathcal{M}_h u)$ definită pe Ω şi cu valori reale, după cum urmează

$$x \in \Omega, \quad x \xrightarrow{(\mathcal{M}_h u)} (\mathcal{M}_h u)(x) = \int_\Omega \omega_h(x, y)\, u(y)\, d\Omega_y, \tag{4.2.1}$$

se numeşte *operatorul de medie al lui Sobolev corespunzător lui h.*

Formula (4.2.1) justifică denumirea de nucleu de medie pentru ω_h. Deoarece din definiţia lui ω_h rezultă că pentru orice $y \in \Omega$ cu $\| x - y \| \geqslant h$ avem $\omega_h(x, y) = 0$, formula (4.2.1) poate fi scrisă sub forma

$$x \in \Omega, \quad (\mathcal{M}_h u)(x) = \int_{\{y \in \Omega,\ \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y)\, u(y)\, d\Omega_h. \tag{4.2.2}$$

Fie $\tilde{u}$ extensia lui u la tot spaţiul definită după cum urmează

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin \Omega \end{cases} \tag{4.2.3}$$

şi fie $(\tilde{\mathcal{M}}_h u)$ definită pe tot spaţiul şi cu valori reale după cum urmează

$$x \in E^{(m)}, \quad x \xrightarrow{(\tilde{\mathcal{M}}_h u)} (\tilde{\mathcal{M}}_h u)(x) = \int_{E^{(m)}} \omega_h(x, y)\, \tilde{u}(y)\, d\Omega_y \tag{4.2.4}$$

Ţinînd seama că dacă $y \in E^{(m)}$ este astfel încît dacă $\| x - y \| \geqslant h$ avem $\omega_h(x, y) = 0$, (4.2.4) se scrie sub forma

$$x \in E^{(m)}, \quad (\tilde{\mathcal{M}}_h u)(x) = \int_{\{y \in E^{(m)},\ \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y)\, \tilde{u}(y)\, d\Omega_y \tag{4.2.5}$$

iar dacă se ţine seama că pentru orice $y \notin \Omega$, $\tilde{u}(y) = 0$, formula (4.2.5) se scrie sub forma

$$x \in E^{(m)}, \quad (\tilde{\mathcal{M}}_h u)(x) = \int_{\{y \in \Omega,\ \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y)\, u(y)\, d\Omega_y \tag{4.2.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.2.2) și (4.2.6) rezultă că

a) Dacă $x \in \Omega$, $(\widetilde{\mathcal{M}}_h u)(x) = (\mathcal{M}_h u)(x)$.

b) Din (4.2.6) rezultă că $(\widetilde{\mathcal{M}}_h u)(x) = 0$ dacă $x \in E^{(m)}$ este astfel încît $\{y \in \Omega,\ \|x - y\| < h\}$ este vidă, cu alte cuvinte, este nulă în orice punct $x \in E^{(m)}$ a cărui distanță la Ω este mai mare sau egală cu h.

c) Funcția $(\widetilde{\mathcal{M}}_h u)$ este indefinit diferențiabilă în tot spațiul.

DEFINIȚIA 4.2.2. Se zice că $\Omega' \subset \Omega$ este un *subdomeniu interior* al lui Ω dacă $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

TEOREMA 4.2.1. *Fie u continuă în Ω. Dacă Ω' este un subdomeniu interior al lui Ω, atunci*

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_h u)(x) = (\mathcal{M}_h u)(x) \to u(x), \qquad \text{cu } h \to 0, \tag{4.2.7}$$

uniform cu x, oricare ar fi $x \in \overline{\Omega}'$.

Demonstrație. Fie $x \in \overline{\Omega}' \subset \Omega$. Ținînd seama de proprietatea 4° din definiția nucleului de medie al lui Sobolev, rezultă că pentru orice $h > 0$, avem

$$u(x) = \widetilde{u}(x) = \widetilde{u}(x) \int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\| < h\}} \omega_h(x, y)\, d\Omega_y = \int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\| < h\}} \widetilde{u}(x)\, \omega_h(x, y)\, d\Omega_y \tag{4.2.8}$$

Din (4.2.6) și (4.2.8) urmează că

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_h u)(x) - u(x) = \int\limits_{\{v \in \Omega,\ \|x-v\| < h\}} \omega_h(x, y)\, \widetilde{u}(y)\, d\Omega_y - \int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\| < h\}} \widetilde{u}(x)\, \omega_h(x, y)\, d\Omega_y . \tag{4.2.9}$$

Această egalitate are loc pentru orice $h > 0$. Fie acum h astfel încît

$$0 < h < \rho(\dot{\Omega}', \dot{\Omega}), \tag{4.2.10}$$

unde $\rho(\dot{\Omega}', \dot{\Omega})$ este distanța între frontierele lui Ω' și Ω.

Ținînd seama că Ω' este subdomeniu interior al lui Ω, rezultă că această alegere este totdeauna posibilă.

Pentru h satisfăcînd (4.2.10), rezultă că pentru orice $x \in \overline{\Omega}'$, avem

$$\{y \in E^{(m)}, \quad \|x - y\| < h\} \subset \Omega$$

şi deci, pentru h satisfăcînd (4.2.10), egalitatea (4.2.9) se scrie

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_h u)(x) - u(x) = (\mathcal{M}_h u)(x) - u(x) = \int\limits_{\{y \in \Omega,\ \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y)\,(u(y) - u(x))\,d\Omega_y. \tag{4.2.11}$$

Fie

$$\Omega'' = \bigcup_{x \in \bar{\Omega}'} \{y / y \in \Omega,\quad \|x - y\| < h,\quad 0 < h < \rho(\dot{\Omega}', \dot{\Omega})\} \tag{4.2.12}$$

Este evident că avem

$$\bar{\Omega}' \subset \bar{\Omega}'' \subset \Omega.$$

Dar, pe $\bar{\Omega}''$ funcţia u este uniform continuă şi deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încît, oricare ar fi $x, y \in \bar{\Omega}''$ cu $\|x - y\| < \delta$, avem

$$|u(y) - u(x)| < \varepsilon. \tag{4.2.13}$$

Egalitatea (4.2.11) este scrisă pentru $x \in \bar{\Omega}' \subset \bar{\Omega}''$ şi $y \in \Omega$ cu $\|x - y\| < h$, deci pentru $y \in \Omega'' \subset \bar{\Omega}''$ şi $\|x - y\| < h < \rho(\dot{\Omega}', \dot{\Omega})$.

Este suficient deci să alegem $h < \min(\delta, \rho(\dot{\Omega}', \dot{\Omega}))$ pentru ca din (4.2.11) şi (4.2.13) să rezulte

$$|(\mathcal{M}_h u)(x) - u(x)| < \varepsilon \int\limits_{\{y / \|x-y\| < h\} \subset \Omega} \omega_h(x, y)\,d\Omega_y = \varepsilon$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 4.2.2. *Fie că* $u \in L_2(\Omega)$. *Atunci*

$$\int_\Omega [(\mathcal{M}_h u)(x)]^2\,d\Omega_x \leqslant \int_\Omega [u(x)]^2\,d\Omega_x\,. \tag{4.2.14}$$

Demonstraţie. Fie $x \in \Omega$. Avem

$$(\mathcal{M}_h u)(x) = (\widetilde{\mathcal{M}}_h u)(x) = \int\limits_{\{y \in E^{(m)},\ \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y)\,\tilde{u}(y)\,d\Omega_y =$$

$$= \int\limits_{\{y \in \Omega,\ \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y)\,u(y)\,d\Omega_y.$$

Utilizînd inegalitatea lui Cauchy rezultă

$$[(\mathcal{M}_h u)(x)]^2 = \left[\int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, \tilde{u}(y)\, d\Omega_y \right]^2 =$$

$$= \left[\int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \sqrt{\omega_h(x, y)} \cdot \sqrt{\omega_h(x, y)}\, \tilde{u}(y)\, d\Omega_y \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, d\Omega_y \cdot \int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, [\tilde{u}(y)]^2\, d\Omega_y =$$

$$= \int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, [\tilde{u}(y)]^2\, d\Omega_y$$

astfel că

$$\int_\Omega [(\mathcal{M}_h u)(x)]^2\, d\Omega_x \leqslant \int_\Omega d\Omega_x \int\limits_{\{v \in E^{(m)},\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, [\tilde{u}(y)]^2\, d\Omega_y =$$

$$= \int_\Omega d\Omega_x \int\limits_{\{v \in \Omega,\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(x, y)\, [u(y)]^2\, d\Omega_y =$$

$$= \int_\Omega [u(y)]^2\, d\Omega_y \int\limits_{\{x \in \Omega,\ \|x-v\|<h\}} \omega_h(y, x)\, d\Omega_x = \int_\Omega [u(y)]^2\, d\Omega_y$$

la schimbarea ordinei de integrare ținîndu-se seama de simetria lui ω_h și de proprietatea 4° din definiția lui ω_h. Teorema este demonstrată.

Teorema precedentă arată că operatorul liniar $\mathcal{M}_h$ are proprietatea că

$$u \in L_2(\Omega) \Rightarrow (\mathcal{M}_h u) \in L_2(\Omega)$$

și că $\mathcal{M}_h$, considerat definit de la $L_2(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$, este continuu.

TEOREMA 4.2.3. *Dacă* $u \in L_2(\Omega)$, *atunci*

$$\lim_{h \to 0} \|(\mathcal{M}_h u) - u\|_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{4.2.15}$$

Demonstrația utilizează următoarele două leme:

LEMA 4.2.1. (Vezi Mihlin [47 a]). *Mulțimea funcțiilor uniform continue în Ω mărginit, este densă în $L_2(\Omega)$.*

LEMA 4.2.2. (Vezi Natanson [50]). *Dacă f este sumabilă pe E măsurabilă, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $e \subset E$ cu* mes. $e < \eta$, *avem*

$$\left| \int_e f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

Demonstrația teoremei 4.2.3. În conformitate cu lema 4.2.1, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o funcție f continuă în tot spațiul, a cărei restricție la Ω, f_Ω, satisface la

$$\|f_\Omega - u\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.2.16}$$

Evident, această funcție se obține prelungind prin continuitate la tot spațiul funcția uniform continuă pe Ω furnizată de lema 4.2.1.

Avem

$$\|(\mathcal{M}_h u) - u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|(\mathcal{M}_h u) - (\mathcal{M}_h f_\Omega)\|_{L_2(\Omega)} + \|(\mathcal{M}_h f_\Omega) - f_\Omega\|_{L_2(\Omega)} + \|f_\Omega - u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.2.17}$$

Pe de altă parte, din teorema (4.2.2) rezultă

$$\|(\mathcal{M}_h u) - (\mathcal{M}_h f_\Omega)\|_{L_2(\Omega)} = \|\mathcal{M}_h (u - f_\Omega)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u - f_\Omega\|_{L_2(\Omega)} \tag{4.2.18}$$

astfel că, ținînd seama de (4.2.16) și (4.2.18, relația (4.2.17) devine

$$\|(\mathcal{M}_h u) - u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f_\Omega - u\|_{L_2(\Omega)} + \|(\mathcal{M}_h f_\Omega) - f_\Omega\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} + \|(\mathcal{M}_h f_\Omega) - f_\Omega\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.2.19}$$

Fie Ω_1 mărginit astfel încît Ω să fie un subdomeniu interior al lui Ω_1. Fie f_{Ω_1} restricția lui f la Ω_1. În conformitate cu teorema 4.2.1, oricare ar fi $x \in \Omega$,

$$(\mathcal{M}_h f_{\Omega_1})(x) \to f_\Omega(x), \quad \text{cînd } h \to 0$$

uniform cu x.

Așadar, pentru $\varepsilon > 0$ pentru care avem (4.2.16) și (4.2.19) există $\delta_1 > 0$ astfel încît

$$|(\mathcal{M}_h f_{\Omega_1})(x) - f_\Omega(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.2.20}$$

îndată ce $h < \delta_1$, oricare ar fi $x \in \Omega$. Dar, oricare ar fi $x \in \Omega$, avem

$$(\mathcal{M}_h f_{\Omega_1})(x) = \int\limits_{\{y \in \Omega_1,\, \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y) f_{\Omega_1}(y)\, d\Omega_y =$$

$$= \int\limits_{\{y \in \Omega,\, \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y) f_{\Omega}(y)\, d\Omega_y +$$

$$+ \int\limits_{\{y \in \Omega_1,\, y \notin \Omega,\, \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y) f_{\Omega_1}(y)\, d\Omega_y =$$

$$= (\mathcal{M}_h f_{\Omega})(x) + \int\limits_{\{y \in \Omega_1,\, y \notin \Omega,\, \|x-y\| < h\}} \omega_h(x,y) f_{\Omega_1}(y)\, d\Omega,$$

astfel încît

$$|(\mathcal{M}_h f_{\Omega})(x) - f_{\Omega}(x)| = |(\mathcal{M}_h f_{\Omega_1})(x) - f_{\Omega}(x) -$$

$$- \int\limits_{\{y \in \Omega_1,\, y \notin \Omega,\, \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y) f_{\Omega_1}(y)\, d\Omega_y| \leqslant |(\mathcal{M}_h f_{\Omega_1})(x) - f_{\Omega}(x)| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\{y \in \Omega_1,\, y \notin \Omega,\, \|x-y\| < h\}} + \omega_h(x, y) f_{\Omega_1}(y)\, d\Omega_y \right|. \qquad (4.2.21)$$

În conformitate cu lema 4.2.2,

$$\left| \int\limits_{\{y \in \Omega_1,\, y \notin \Omega_1 \|x-y\| < h\}} \omega_h^{\cdot}(x, y) f_{\Omega_1}(y)\, d\Omega_y \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (4.2.22)$$

îndată ce $h < \delta_2$.

Pentru $h < \min(\delta_1, \delta_2)$ avem atît (4.2.20) cît și (4.2.22) astfel că din (4.2.21) rezultă

$$|(\mathcal{M}_h f_{\Omega})(x) - f_{\Omega}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.2.23)$$

oricare ar fi $x \in \Omega$.

Din (4.2.23) rezultă

$$\|(\mathcal{M}_h f_\Omega) - f_\Omega\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}(\text{mes } \Omega)^{1/2} \tag{4.2.24}$$

iar din (4.2.19) și (4.2.24) rezultă

$$\|(\mathcal{M}_h f_\Omega) - u\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}(1 + (\text{mes } \Omega)^{1/2})$$

pentru $h < \min(\delta_1, \delta_2)$, ceea ce demonstrează teorema.

DEFINIȚIA 4.2.3. Fie $\delta \in R^+$. *Se numește bandă frontieră de lățime* δ și se notează cu Ω_δ, următoarea mulțime

$$\Omega_\delta = \{x / x \in \overline{\Omega},\ \rho(x, \dot{\Omega}) \leqslant \delta\}. \tag{4.2.25}$$

TEOREMA 4.2.4. *Fie* $u \in L_2(\Omega)$ *și* $\varepsilon > 0$. *Există o funcție* f *reală, definită și indefinit derivabilă pe* Ω, *nulă într-o bandă frontieră a lui* Ω, *astfel încît*

$$\|u - f\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon. \tag{4.2.26}$$

Demonstrație. Vom dovedi mai întîi că există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, dacă $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$, funcția reală w_δ definită pe Ω după cum urmează

$$w_\delta(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă} \quad x \in \Omega - (\Omega_\delta \cap \Omega) \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in \Omega_\delta \cap \Omega \end{cases} \tag{4.2.27}$$

satisface la

$$\|u - w_\delta\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.28}$$

Într-adevăr,

$$\|u - w_\delta\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega_\delta \cap \Omega} [u(x)]^2 \, d\Omega_x.$$

Aplicînd lema 4.2.2 rezultă că pentru $\frac{\varepsilon^2}{4} > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, dacă mes $\Omega_\delta \cap \Omega < \eta(\varepsilon)$,

$$\int_{\Omega_\delta \cap \Omega} [u(x)]^2 \, d\Omega_x < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Dar, mes $\Omega_\delta \cap \Omega < \eta(\varepsilon)$ dacă lățimea benzii frontieră, δ, este mai mică decît un $\delta(\varepsilon)$.

Așadar, pentru $\varepsilon^2/4 > 0$ există $\delta(\varepsilon)$ astfel încît, dacă $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$, avem

$$\|u - w_\delta\|^2_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

ceea ce atrage (4.2.28).

Fie acum δ astfel încît $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$ (deci astfel încît avem (4.2.28)) și fie

$$0 < h < \delta < \delta(\varepsilon). \tag{4.2.29}$$

Pentru h satisfăcînd (4.2.29), fie funcția $(\widetilde{\mathcal{M}}_h\, w_\delta)$ definită precum se știe. Avem :

$$x \in \bar{\Omega},\ (\widetilde{\mathcal{M}}_h\, w_\delta)(x) = \int_{\{y \in \Omega,\, \|x-y\| < h\}} \omega_h(x, y)\, w_\delta(y)\, d\Omega_y \tag{4.2.30}$$

Vom dovedi că $(\widetilde{\mathcal{M}}_h\, w_\delta)$ are următoarele proprietăți :

a) este indefinit derivabilă în $\bar{\Omega}$;
b) este nulă în banda frontieră $\Omega_{\delta-h}$;
c) satisface la

$$\|u - \widetilde{\mathcal{M}}_h w_\delta\|_{L_2(\Omega)} = \|u - (\mathcal{M}_h\, w_\delta)\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon. \tag{4.2.31}$$

Este evident că, demonstrînd că funcția $(\widetilde{\mathcal{M}}_h\, w_\delta)$ are proprietățile a), b), c), demonstrăm existența funcției f reclamată de teorema 4.2.4.

Proprietatea a) este evidentă ținînd seama de proprietățile nucleului de medie al lui Sobolev.

În ceea ce privește proprietatea b), fie $x \in \Omega_{\delta-h}$, deci $x \in \bar{\Omega}$ și $\rho(x, \dot{\Omega}) \leqslant \leqslant (\delta - h)$. Vom dovedi că

$$\{y \in \Omega,\ \|x - y\| < h\} \subset \Omega_\delta. \tag{4.2.32}$$

Într-adevăr, din inegalitatea evidentă

$$|\rho(y, \dot{\Omega}) - \rho(x, \dot{\Omega})| \leqslant \rho(x, y)$$

rezultă

$$\rho(y, \dot{\Omega}) \leqslant \rho(x, \dot{\Omega}) + \rho(x, y) < (\delta - h) + h = \delta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, mulţimea pe care se face integrarea în (4.2.30) este inclusă în $\Omega_\delta \cap \Omega$. Dar în orice punct $y \in \Omega_\delta \cap \Omega$, $w_\delta(y)=0$ ceea ce, ţinînd seama de (4.2.30), atrage $(\widetilde{\mathcal{M}}_h\, w_\delta)\,(x)=0$ în orice punct $x \in \Omega_{\delta-h}$, cu h satisfăcînd (4.2.29). Pe de altă parte, din teorema 4.2.1 rezultă existenţa unui $h_0(\varepsilon)$ astfel încît, dacă $0 < h < h_0(\varepsilon)$, avem

$$\|(\widetilde{\mathcal{M}}_h\, w_\delta) - w_\delta\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.2.33}$$

Pentru h ales astfel încît

$$h < \min\,(\delta, h_0(\varepsilon))$$

sînt valabile toate consideraţiile anterioare referitoare la $(\widetilde{\mathcal{M}}_h\, w_\delta)$ cît şi (4.2.33).

Din (4.2.28) şi (4.2.33) rezultă evident (4.2.31) şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Teorema 4.2.4 exprimă faptul că mulţimea funcţiilor indefinit derivabile în $\overline{\Omega}$ şi nule într-o bandă frontieră (alta pentru fiecare funcţie) este densă în $L_2(\Omega)$.

Următoarea teoremă, consecinţă a teoremei anterioare, se va dovedi foarte importantă în aplicaţii.

TEOREMA 4.2.5. *Mulţimea funcţiilor de clasă $C^{(k)}(\overline{\Omega})$ şi satisfăcînd orice condiţii omogene la frontieră este densă în $L_2(\Omega)$.*

Demonstraţie. Este suficient să remarcăm că mulţimea funcţiilor care sînt de clasă $C^{(k)}(\overline{\Omega})$ şi satisfac condiţii omogene la frontieră conţine mulţimea funcţiilor de clasă $C^\infty(\overline{\Omega})$ şi nule într-o bandă frontieră, şi să ţinem seama de teorema anterioară.

§ 4.3. Derivate generalizate (derivate în sens Sobolev)

Noţiunea de derivată generalizată a fost introdusă, cum se ştie, de Sobolev. Cadrul în care vom prezenta această noţiune în cele ce urmează nu este cel mai general dar este suficient de larg pentru aplicaţiile pe care le avem în vedere. Vom puncta rezultatele susceptibile de a fi prezentate într-un cadru mai general.

4.3.1. Operatorul conjugat al unui operator liniar (nemărginit) [3]

Fie H un spaţiu hilbertian real, $\mathcal{D}(T)$ o mulţime liniară, $\mathcal{D}(T) \subset H$ şi T un operator liniar definit de la $\mathcal{D}(T)$ în H,

$$T : \mathcal{D}(T) \to H.$$

Întrebare: Fie $g \in H$. Există $g^* \in H$ astfel încît

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, g^* \rangle \tag{4.3.1.1}$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{D}(T)$?

Să observăm că există perechi de elemente, $g, g^* \in H$, astfel încît să fie satisfăcută (4.3.1.1) pentru orice $f \in \mathcal{D}(T)$, de exemplu $g = g^* = 0$ dar că, dacă pentru un anumit element $g \in H$ există $g^* \in H$ astfel încît să fie satisfăcută (4.3.1.1), g nu este, în general, determinat în mod unic.

Într-adevăr, dacă avem (4.3.1.1), atunci avem și

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, g^* \rangle = \langle f, g^* + h^* \rangle$$

oricare ar fi elementul h^* ortogonal pe $\mathcal{D}(T)$.

Dacă însă $\mathcal{D}(T)$ este densă în H și pentru un anumit element $g \in H$ există $g^* \in H$ astfel încît să fie satisfăcută (4.3.1.1) pentru orice $f \in \mathcal{D}(T)$, atunci g^* este unic determinat.

Într-adevăr, dacă pentru un anumit $g \in H$ ar exista două elemente $g_1^*, g_2^* \in H$ astfel încît să avem

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, g_1^* \rangle = \langle f, g_2^* \rangle, \quad f \in \mathcal{D}(T)$$

rezultă imediat

$$\langle f, g_1^* - g_2^* \rangle = 0$$

pentru orice $f \in \mathcal{D}(T)$, cu $\mathcal{D}(T)$ densă în H ceea ce atrage $g_1^* - g_2^* = 0$ deci $g_1^* = g_2^*$.

Considerentele de mai sus justifică următoarea definiție:

DEFINIȚIA 4.3.1.1. Fie H un spațiu hilbertian real, $\mathcal{D}(T)$ o mulțime liniară densă în H și T un operator liniar definit de la $\mathcal{D}(T)$ în H,

$$T : \mathcal{D}(T) \to H.$$

Fie $\mathcal{D}(T^*)$ mulțimea tuturor elementelor g din H care au proprietatea că pentru fiecare element g din această mulțime, există $g^* \in H$ (unic determinat) astfel încît produsul scalar $\langle Tf, g \rangle$ să poată fi reprezentat sub forma $\langle f, g^* \rangle$, oricare ar fi $f \in \mathcal{D}(T)$:

$$\mathcal{D}(T^*) = \{g / g \in H, \text{ există } g^* \in H, \langle Tf, g \rangle = \langle f, g^* \rangle,$$

$$\text{oricare ar fi } f \in \mathcal{D}(T)\}, \tag{4.3.1.2}$$

Operatorul T^* care asociază fiecărui element $g \in \mathcal{D}(T^*)$ acel element (unic) $g^* \in H$ cu care produsul scalar $\langle Tf, g\rangle$ se reprezintă sub forma $\langle Tf, g\rangle = \langle f, g^*\rangle$ oricare ar fi $f \in \mathcal{D}(T)$, se numește *conjugatul lui* T:

$$T^* : \mathcal{D}(T^*) \to H;\ g \in \mathcal{D}(T^*),\ g \xrightarrow{T^*} g^* = T^* g, \qquad (4.3.1.3)$$

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, g^*\rangle = \langle f, T^* g\rangle$$

Iată cîteva proprietăți imediate ale operatorului conjugat:

PROPOZIȚIA 4.3.1.1. *Operatorul conjugat al unui operator liniar este de asemenea liniar.*

Demonstrație. Trebuie dovedit că:

a) $\mathcal{D}(T^*)$ este o mulțime liniară;

b) oricare ar fi $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(T^*)$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in R$,

$$T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T^* g_1 + \alpha_2 T^* g_2.$$

Fie, într-adevăr, $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(T^*)$. Pentru a dovedi a) trebuie dovedit că $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in \mathcal{D}(T^*)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Dar $g_1 \in \mathcal{D}(T^*)$ înseamnă că există $g_1^* \in H$ astfel încît

$$\langle Tf, g_1\rangle = \langle f, g_1^*\rangle,\ f \in \mathcal{D}(T).$$

Analog, există $g_2^* \in H$ astfel încît

$$\langle Tf, g_2\rangle = \langle f, g_2^*\rangle,\ f \in \mathcal{D}(T)$$

Pentru a demonstra că $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in \mathcal{D}(T^*)$, trebuie dovedit că există g^* astfel încît

$$\langle Tf, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\rangle = \langle f, g^*\rangle,\ f \in \mathcal{D}(T). \qquad (4.3.1.4)$$

Evident, g^* cu care se scrie (4.3.1.4) este $g^* = \alpha_1 g_1^* + \alpha_2 g_2^*$. Într-adevăr, avem

$$\langle Tf, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\rangle = \alpha_1\langle Tf, g_1\rangle + \alpha_2\langle Tf, g_2\rangle =$$

$$\alpha_1\langle f, g_1^*\rangle + \alpha_2\langle f, g_2^*\rangle = \langle f, \alpha_1 g_1^* + \alpha_2 g_2^*\rangle$$

$$= \langle f, \alpha_1 T^* g_1 + \alpha_2 T^* g_2\rangle = \langle f, T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\rangle$$

în egalitățile de mai sus fiind conținută și demonstrația punctului b), căci din

$$\langle f, \alpha_1 T^* g_1 + \alpha_2 T^* g_2\rangle = \langle f, T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\rangle,$$

Scanned with OKEN Scanner

ținînd seama că $f \in \mathcal{D}(T)$ și $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$, rezultă

$$T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T^* g_1 + \alpha_2 T^* g_2.$$

DEFINIȚIA 4.3.1.2. Operatorul T (nu neapărat liniar), $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ se zice *închis dacă* din

$$f_n \in \mathcal{D}(T), \lim_{n\to\infty} f_n = f, \lim_{n\to\infty} Tf_n = g \tag{4.3.1.4}$$

rezultă

$$f \in \mathcal{D}(T) \text{ și } Tf = g. \tag{4.3.1.5}$$

Dacă cele două limite din (4.3.1.4) sînt înțelese în sensul normei din H, operatorul T se zice tare închis iar dacă cele două limite din (4.3.1.4) sînt înțelese în sens slab, T se zice slab închis.

PROPOZIȚIA 4.3.1.2. *Dacă operatorul* T,

$$T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$$

este slab închis, atunci este și tare închis.

Demonstrație. Prin ipoteză, T are următoarea proprietate: oricare ar fi șirul $f_n \in \mathcal{D}(T)$ cu $f_n \overset{\text{slab}}{\longrightarrow} f$ și $Tf_n \overset{\text{slab}}{\longrightarrow} g$ rezultă că $f \in \mathcal{D}(T)$ și $Tf = g$.

Pentru a demonstra că este tare închis, fie $f_n \in \mathcal{D}(T)$ cu $f_n \overset{\text{tare}}{\longrightarrow} f$ și $Tf_n \overset{\text{tare}}{\longrightarrow} g$. Cum însă convergența tare o implică pe cea slabă, din $f_n \overset{\text{tare}}{\longrightarrow} f$ și $Tf_n \overset{\text{tare}}{\longrightarrow} g$ rezultă $f_n \overset{\text{slab}}{\longrightarrow} f$ și $Tf_n \overset{\text{slab}}{\longrightarrow} g$. Cum însă T este prin ipoteză slab închis, de aici decurge că $f \in \mathcal{D}(T)$ și $Tf = g$.

PROPOZIȚIA 4.3.1.3. *Operatorul* T^* *este închis* (*chiar dacă* T *nu este închis*).

Demonstrație. Ținînd cont de propoziția 4.3.1.2, va fi suficient să demonstrăm că T este slab închis.

Fie așadar $v_n \in \mathcal{D}(T^*)$, $v_n \overset{\text{slab}}{\longrightarrow} v$ și $T^* v_n \overset{\text{slab}}{\longrightarrow} w$. Vom dovedi că $v_n \in \mathcal{D}(T^*)$ și $T^* v = w$. Într-adevăr, din $v_n \in \mathcal{D}(T^*)$ rezultă că, pentru orice $u \in \mathcal{D}(T)$, avem

$$\langle Tu, v_n \rangle = \langle u, T^* v_n \rangle.$$

Trecînd la limită cu $n \to \infty$ în această egalitate şi ţinînd cont că $v_n \xrightarrow{\text{slab}} v$ şi $T^* v_n \xrightarrow{\text{slab}} w$ se obţine

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, w \rangle$$

adică $v \in \mathcal{D}(T^*)$ şi $T^* v = w$.

4.3.2. Derivate în sens Sobolev [47a]

În tot ceea ce urmează, Ω are proprietăţile enunţate la începutul capitolului.

Vom nota cu $M^{(k)}(\Omega)$ mulţimea funcţiilor de clasă $C^{(k)}$ în $\overline{\Omega}$ şi nule într-o bandă frontieră. Este evident că $M^{(k)}(\Omega)$ conţine mulţimea funcţiilor de clasă C^∞ în $\overline{\Omega}$ şi nule într-o bandă frontieră, ceea ce, după teorema 4.2.4, atrage faptul că $M^{(k)}(\Omega)$ este densă în $L_2(\Omega)$.

Fie $D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}$ operatorul care asociază fiecărei funcţii din $M^{(k)}(\Omega)$ derivata sa după variabilele $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, aceasta din urmă considerată ca un element al lui $L_2(\Omega)$, cu $1 \leqslant i_p \leqslant m$, oricare ar fi $p = 1, \ldots, k$. Aşadar,

$$D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k} : M^{(k)}(\Omega) \to L_2(\Omega)$$

după cum urmează:

$$u \in M^{(k)}(\Omega),\ u \xrightarrow{D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}} D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k} u = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \in L_2(\Omega),$$

cu $1 \leqslant i_p \leqslant m$ oricare ar fi $p = 1, \ldots, k$.

Să observăm că, luînd

$$H = L_2(\Omega);$$

$$\mathcal{D}(T) = M^{(k)}(\Omega);$$

$$T = D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k} : M^{(k)}(\Omega) \to L_2(\Omega),$$

sînt îndeplinite toate condiţiile pentru a defini operatorul conjugat al operatorului $D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}$, cu tehnica expusă în subparagraful 4.3.1.

Scanned with OKEN Scanner

Fie așadar

$$\mathcal{D}[(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*] = \{u/u \in L_2(\Omega) \text{ cu proprietatea: oricare ar fi } \varphi \in M^{(k)}(\Omega),$$
$$\text{există } u^* \in L_2(\Omega) \text{ astfel încît } \langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\varphi, u\rangle_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \langle \varphi, u^*\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \varphi, (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u\rangle_{L_2(\Omega)} =$$
$$= (-1)^k \langle \varphi, (-1)^k (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u\rangle_{L_2(\Omega)}\}$$

DEFINIȚIA 4.3.2.1. Elementul $(-1)^k (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u \in L_2(\Omega)$ se numește *derivata generalizată de ordin* k a lui u în Ω după variabilele $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$.

Să observăm cadrul în care a fost pusă această definiție.

Derivata generalizată de ordin k a fost definită pentru acele funcții din $L_2(\Omega)$ care fac parte din domeniul de definiție al operatorului $(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*$, conjugatul lui $D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}$, acesta din urmă fiind considerat definit de la $M^{(k)}(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$. Pentru orice $u \in \mathcal{D}[(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*]$, derivata generalizată de ordin k a lui u, $(-1)^k (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u$, este un element din $L_2(\Omega)$. Așadar, atît funcțiile care posedă derivată generalizată de ordin k cît și derivatele generalizate sînt elemente din $L_2(\Omega)$.

REMARCĂ. Toate funcțiile u ce posedă derivate parțiale în sens clasic continue pînă la ordinul k inclusiv în Ω, fac parte din domeniul de definiție al operatorului $(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*$ și

$$(-1)^k (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$$

Cu alte cuvinte, toate funcțiile ce posedă derivate parțiale în sens clasic continue pînă la ordinul k inclusiv în Ω, posedă și derivate generalizate după variabilele $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ în Ω și acestea din urmă coincid cu derivatele în sens clasic după aceleași variabile în Ω.

Într-adevăr, oricare ar fi $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$, avem

$$\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\varphi, u\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} u \, d\Omega, \qquad (4.3.2.1)$$

de unde, prin integrare prin părți de k ori și ținînd seama că atît φ cît și derivatele sale sînt nule pe suprafață, se obține

$$\int_\Omega \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} u \, d\Omega = (-1)^k \int_\Omega \varphi \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} d\Omega. \qquad (4.3.2.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.3.2.1) şi (4.3.2.2) rezultă

$$\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\varphi,\, u\rangle_{L_2(\Omega)} = \left\langle \varphi,\, (-1)^k \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} \right\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \varphi,\, (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*\, u\rangle_{L_2(\Omega)}$$

de unde, ţinînd seama de definiţia 4.3.2.1, rezultă

$$(-1)^k\,(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*\, u = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}},$$

ceea ce demonstrează aserţiunea.

În cele ce urmează, vom nota derivata generalizată a funcţiei u după variabilele $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ în Ω cu

$$v = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}.$$

Din definiţia 4.3.2.1 urmează că avem

$$\int_\Omega \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}\, u\, d\Omega = (-1)^k \int_\Omega \varphi v\, d\Omega. \qquad (4.3.2.3)$$

Egalitatea (4.3.2.3) permite să se pună următoarea definiţie a derivatei generalizate (în care u şi v sînt presupuse numai sumabile) : funcţia sumabilă v se zice derivata generalizată de ordin k a funcţiei sumabile u după variabilele $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$, dacă pentru orice $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$ este satisfăcută egalitatea (4.3.2.3).

În cele ce urmează vom rămîne însă la conceptul de derivată generalizată pe care l-am introdus iniţial în care atît funcţia ce posedă derivată generalizată, cît şi derivata generalizată însăşi, sînt elemente din $L_2(\Omega)$.

După cum vom vedea ulterior, faptul că soluţiile generalizate în sens Sobolev pentru unele probleme ale teoriei plasticităţii posedă derivate generalizate de energie finită va juca un rol important în obţinerea unor estimări apriorice.

În cele ce urmează vom da cîteva proprietăţi imediate ale derivatelor generalizate.

TEOREMA 4.3.2.1. *Fie $\Omega' \subset \Omega$ cu $\dot{\Omega}'$ satisfăcînd aceleaşi condiţii de regularitate ca şi $\dot{\Omega}$. Dacă v este derivata generalizată de ordin k a lui u în Ω după variabilele $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$, atunci restricţia lui v la Ω', $v_{\Omega'}$, este derivata generalizată a lui $u_{\Omega'}$ după aceleaşi variabile în Ω'.*

Demonstrație. Ținînd seama de definiția derivatei generalizate, ipoteza teoremei 4.3.2.1 afirmă că $u \in \mathcal{D}[(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*]$ și că oricare ar fi $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$, avem

$$\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\varphi, u\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \varphi, (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^k \langle \varphi, v\rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (4.3.2.4)$$

Ceea ce trebuie demonstrat este că $u_{\Omega'} \in \mathcal{D}[(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k:\Omega'})^*]$ (unde cu $(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k:\Omega'})^*$ a fost notat adjunctul operatorului $D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}$ considerat definit de la $M^{(k)}(\Omega')$ la $L_2(\Omega')$ și că, pentru orice $\varphi \in M^{(k)}(\Omega')$, avem

$$\langle Dx^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\varphi, u_{\Omega'}\rangle_{L_2(\Omega')} = (-1)^k \langle \varphi, v_{\Omega'}\rangle_{L_2(\Omega')}. \quad (4.3.2.5)$$

Fie $\varphi \in M^{(k)}(\Omega')$ și fie $\tilde{\varphi}$ definită astfel

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{în} \quad \Omega', \\ 0 & \text{în} \quad \Omega - \Omega'. \end{cases} \quad (4.3.2.6)$$

Evident, $\tilde{\varphi} \in M^{(k)}(\Omega)$.

Cum (4.3.2.4) este adevărată pentru orice $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$, ea este adevărată și pentru $\tilde{\varphi}$, deci avem

$$\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\tilde{\varphi}, u\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^{(k)} \int_\Omega \tilde{\varphi} v \, d\Omega. \quad (4.3.2.7)$$

Dar ținînd seama de modul în care este definită $\tilde{\varphi}$, avem

$$\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\tilde{\varphi}, u\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial^k \tilde{\varphi}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} u \, d\Omega = \int_{\Omega'} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} u \, d\Omega' \quad (4.3.2.8)$$

iar

$$(-1)^k \int_\Omega \tilde{\varphi} v \, d\Omega = (-1)^k \int_{\Omega'} \varphi v \, d\Omega'. \quad (4.3.2.9)$$

Din (4.3.2.7), (4.3.2.8) și (4.3.2.9) rezultă

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} u \, d\Omega' = (-1)^k \int_{\Omega'} \varphi v \, d\Omega'$$

adică tocmai (4.3.2.5).

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 4.3.2.2. *Dacă v este derivata generalizată de ordinul k în Ω a funcţiei u după variabilele $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ iar w este derivata generalizată de ordinul l în Ω a funcţiei v după variabilele $x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}$, atunci w este derivata generalizată de ordinul $k+l$ în Ω a funcţiei u după variabilele $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, $x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}$.*

Demonstraţie. Ipotezele teoremei 4.3.2.2 sînt următoarele:

a) $u \in \mathcal{D}[(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*]$ şi pentru orice $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$, avem

$$\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\varphi, u\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \varphi, (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^k \langle \varphi, v\rangle_{L_2(\Omega)}; \quad (4.3.2.10)$$

b) $v \in \mathcal{D}[(D^{|l|}_{j_1,\ldots,j_l})^*]$ şi pentru orice $\varphi \in M^{(l)}(\Omega)$, avem

$$\langle D^{|l|}_{j_1,\ldots,j_l}\varphi, v\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \varphi, (D^{|l|}_{j_1,\ldots,j_l})^* v\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^l \langle \varphi, w\rangle_{L_2(\Omega)} \quad (4.3.2.11)$$

Trebuie demonstrat că $u \in \mathcal{D}[(D^{|k+l|}_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l})^*]$ şi că pentru orice $\varphi \in M^{(k+l)}(\Omega)$, avem

$$\langle D^{|k+l|}_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l}\varphi, u\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^{k+l} \langle \varphi, w\rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (4.3.2.12)$$

Fie, într-adevăr, $\varphi \in M^{(k+l)}(\Omega)$. Atunci $\dfrac{\partial^l \varphi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}} \in M^{(k)}(\Omega)$. Cum (4.3.2.10) este adevărată pentru orice funcţie din $M^{(k)}(\Omega)$, ea este adevărată şi pentru $\dfrac{\partial^l \varphi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}$, deci avem

$$\left\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}\right), u\right\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^k \left\langle \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}, v\right\rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (4.3.2.13)$$

Dar din faptul că $\varphi \in M^{(k+l)}(\Omega)$, rezultă, evident, că $\varphi \in M^{(l)}(\Omega)$ şi deci, ţinînd seama de (4.3.2.11), avem

$$\left\langle \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}, v\right\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^l \langle \varphi, w\rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (4.3.2.14)$$

Din (4.3.2.13) şi (4.3.2.14) rezultă (4.3.2.12), ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 4.3.2.3. *Fie că v_n, $n \in N$, sînt derivatele generalizate de ordin k după variabilele $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ ale funcţiilor u_n, $n \in N$, în Ω. Dacă $u_n \xrightarrow{\text{slab}} u$ şi $v_n \xrightarrow{\text{slab}} v$ în Ω, atunci u posedă derivată generalizată după variabilele $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ în Ω şi avem*

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = v. \quad (4.3.2.15)$$

Demonstrație. Reamintim că am demonstrat (vezi propoziția 4.3.1.3) că operatorul conjugat al unui operator liniar este slab închis, deci că dacă $u_n \in \mathcal{D}(T^*)$, $u_n \xrightarrow{\text{slab}} u$ și $T^*u_n \xrightarrow{\text{slab}} v$, atunci $u \in \mathcal{D}(T^*)$ și $T^*u = v$.

Din ipotezele teoremei 4.3.2.3 deducem că $u_n \in \mathcal{D}[(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*]$ și că $(-1)^k (D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u_n = v_n$ precum și că $u_n \xrightarrow{\text{slab}} u$ iar $(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u_n \xrightarrow{\text{slab}} (-1)^k v$. Ținînd seama de proprietatea de închidere a operatorului conjugat pe care am amintit-o mai sus, rezultă că $u \in \mathcal{D}[D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^*]$ și $(D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k})^* u = (-1)^k v$ ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 4.3.2.4. *Fie că există derivata generalizată a funcției u după variabilele $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ în Ω. Atunci există și derivata generalizată a funcției $(\mathcal{M}_h u)$ după aceleași variabile în $\overline{\Omega} - \Omega_h$ și*

$$\mathcal{M}_h \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k (\mathcal{M}_h u)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \tag{4.3.2.16}$$

în orice punct $x \in \overline{\Omega} - \Omega_h$.

Demonstrație. Fie x fixat în $\overline{\Omega} - \Omega_h$. Vom dovedi că funcția $f(y) = \omega_h(x, y)$ este din $M^{(k)}(\Omega)$. Ținînd seama de condițiile de regularitate pe care le satisface nucleul de medie al lui Sobolev, rămîne să dovedim numai că f este nulă într-o bandă frontieră.

Într-adevăr, cum $x \in \overline{\Omega} - \Omega_h$, rezultă că $\rho(x, \dot{\Omega}) > h$. Fie $0 < h' < \rho(x, \dot{\Omega}) - h$. Vom dovedi că $f(y) = \omega_h(x, y)$ este nulă în banda frontieră de lățime h'. Fie, într-adevăr, $y \in \Omega_{h'}$, deci $u \in \overline{\Omega}$ și astfel încît $\rho(y, \dot{\Omega}) \leqslant h'$. Din inegalitatea evidentă

$$\rho(x, \dot{\Omega}) - \rho(y, \dot{\Omega}) \leqslant \rho(x, y)$$

rezultă

$$\rho(x, y) > \rho(x, \dot{\Omega}) - h' > \rho(x, \dot{\Omega}) - \rho(x, \dot{\Omega}) + h = h$$

ceea ce, ținînd seama de definiția nucleului de medie al lui Sobolev, atrage că $f(y) = \omega_h(x, y) = 0$.

Fie acum x arbitrar în $\overline{\Omega} - \Omega_h$. Avem

$$\left(\mathcal{M}_h \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}\right)(x) = \int_\Omega \frac{\partial^k u}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_k}} \omega_h(x, y)\, d\Omega_y = \left\langle f, \frac{\partial^k u}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_k}} \right\rangle_{L_2(\Omega)} \tag{4.3.2.17}$$

Cum însă u posedă derivată generalizată de ordinul k după variabilele $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ în Ω, pentru orice $\varphi \in M^{(k)}(\Omega)$ avem

$$\langle D^{|k|}_{i_1,\ldots,i_k}\varphi, u\rangle = (-1)^k \left\langle \varphi, \frac{\partial^k u}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_k}} \right\rangle_{L_2(\Omega)} \tag{4.3.2.18}$$

În particular, pentru $\varphi = f$ din (4.3.2.18) rezultă

$$\left\langle f, \frac{\partial^k u}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_k}} \right\rangle_{L_2(\Omega)} = (-1)^k \int_\Omega \frac{\partial^k \omega_h(x, y)}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_k}} u(y)\, d\Omega_y. \qquad (4.3.2.19)$$

Dar, ținînd seama că ω_h depinde de (x, y) numai prin $r = \|x - y\|$, rezultă imediat:

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial x_k} = \omega_h'(r) \frac{\partial r}{\partial x_k} = \omega_h'(r) \frac{(x_k - y_k)}{r}; \quad \frac{\partial \omega_h}{\partial y_k} = \omega_h'(r) \frac{\partial r}{\partial y_k} = \omega_h'(r) \frac{-(x_k - y_k)}{r}$$

și deci

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial y_k} = -\frac{\partial \omega_h}{\partial x_k},$$

de unde rezultă că

$$\frac{\partial^k \omega_h(x, y)}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_k}} = (-1)^k \frac{\partial^k \omega_h(x, y)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}. \qquad (4.3.2.20)$$

Din (4.3.2.17), (4.3.2.19), (4.3.2.20) rezultă

$$\left(\mathcal{M}_h \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}\right)(x) = (-1)^k \int_\Omega \frac{\partial^k \omega_h(x, y)}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_k}} u(y)\, d\Omega_y =$$

$$= (-1)^{2k} \int_\Omega \frac{\partial^k \omega_h(x, y)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} u(y)\, d\Omega_y =$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \int_\Omega \omega_h(x, y)\, u(y)\, d\Omega_y = \frac{\partial^k (\mathcal{M}_h u)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Teorema 4.3.2.5. *Fie că funcția u posedă derivată generalizată de ordinul k după variabilele $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ în Ω. Atunci*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{\partial^k (\mathcal{M}_h u)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} - \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right\|_{L_2(\Omega')} = 0 \qquad (4.3.2.21)$$

oricare ar fi Ω' subdomeniu interior al lui Ω.

Demonstrație. Fie Ω' un subdomeniu interior al lui Ω și $h > 0$ astfel încît $\Omega' \subset \overline{\Omega} - \Omega_h$.

Ținînd cont de teorema anterioară, pentru orice punct $x \in \overline{\Omega} - \Omega_h$ avem

$$\left(\mathcal{M}_h \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}\right)(x) = \frac{\partial^k (\mathcal{M}_h u)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \qquad (4.3.2.22)$$

și cum h este astfel ales încît $\Omega' \subset \overline{\Omega} - \Omega_h$, rezultă că (4.3.2.22) este adevărată în orice punct din Ω'.

Dar din teorema 4.2.3 urmează că

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Omega} \left[\left(\mathcal{M}_h \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right)(x) - \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \right]^2 d\Omega = 0$$

deci, cu atît mai mult,

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Omega'} \left[\left(\mathcal{M}_h \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right)(x) - \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \right]^2 d\Omega = 0$$

ceea ce, ținînd seama de (4.3.2.22), înseamnă că

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Omega'} \left[\frac{\partial^k (\mathcal{M}_h u)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) - \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \right]^2 d\Omega = 0$$

și teorema este demonstrată.

§ 4.4. Gradul lui Brouwer al unei aplicații continue a unui spațiu de dimensiune finită în el însuși [34],]56]

Fie $y : \Omega \to E^{(m)}$, $y \in C^{(k)}(\Omega)$, $k \geqslant 1$ și fie $x \in \Omega$.

DEFINIȚIA 4.4.1. Se numește *jacobian al aplicației* y *în punctul* x *și se notează cu* $\mathcal{J}(y(x))$ următorul determinant:

$$\mathcal{J}(y(x)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}, \tag{4.4.1}$$

derivatele $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ fiind considerate în punctul x.

Cu notaţia $a_{ij}(x) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(x)$ vom scrie $\mathcal{J}(y(x)) = \det a_{ij}(x)$. Fie $A_{ij}(x)$ complementul algebric al lui $a_{ij}(x)$.

LEMA 4.4.1. *Dacă* $y : \Omega \to E^{(m)}$ *este de clasă* $C^k(\Omega)$ *cu* $k \geqslant 2$, *atunci* $A_{ij} \in C^{(1)}(\Omega)$ *şi* $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j} = 0$.

Demonstraţie. Prima afirmaţie este evidentă.

În ceea ce priveşte faptul că $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j} = 0$, să observăm că putem reprezenta pe $A_{ij}(x)$ sub forma unui determinant de ordinul n obţinut înlocuind toate elementele coloanei j cu zero în afara de elementul coloanei j care se găseşte pe linia i în locul căruia punem 1.

$$A_{ij}(x) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_s} & \dots 0 \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} & \frac{\partial y_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_s} & \dots 1 \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_s} & \dots 0 \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \end{array} \tag{4.4.2}$$

Din (4.4.2) urmează

$$\frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{m} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & s & & j & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_s \partial x_j} & \dots 0 \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} & \frac{\partial y_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_s \partial x_j} & \dots 1 \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_s \partial x_j} & \dots 0 \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \end{array} = \sum_{s=1}^{m} f_{sj}(x) \tag{4.4.3}$$

și deci

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} f_{sj}(x) = 0$$

căci $f_{sj}(x) = -f_{js}(x)$.

Într-adevăr, dacă f_{sj} este determinantul care apare în (4.4.3) și care are pe coloana s derivate duble cu x_s și x_j iar pe coloana j are zero în afară de elementul coloanei j care se află pe linia i și care este egal cu 1, f_{js} are pe coloana j derivate în raport cu x_j și x_s iar pe coloana s zerouri în afară de elementul coloanei s care se află pe linia i și care este egal cu 1. Ținînd seama că $y \in C^k(\Omega)$ $k \geqslant 2$, și că, deci avem

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_s \partial x_j} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_s}$$

rezultă că $f_{js}(x)$ se obține din $f_{sj}(x)$ schimbînd între ele coloanele s și j, de unde rezultă că $f_{sj}(x) = -f_{js}(x)$.

LEMA 4.4.2 (Lema fundamentală). *Fie* $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(2)}(\Omega) \cap \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$ *și satisfăcînd*

$$\|y(x)\| > \varepsilon > 0, \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{4.4.4}$$

Fie φ *o funcție reală, continuă pe* $0 \leqslant r < \infty$, *nulă pentru* $r \geqslant \varepsilon$ *și într-o vecinătate a lui* $r = 0$, *și satisfăcînd la*

$$\int_0^{+\infty} r^{m-1} \varphi(r)\, dr = 0. \tag{4.4.5}$$

Atunci

$$\int_\Omega \varphi(\|y(x)\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, dx = 0. \tag{4.4.6}$$

Demonstrație. Vom începe prin a analiza ipotezele. Condiția (4.4.4) exprimă faptul că funcția continuă y pe compactul $\dot{\Omega}$ nu are zerouri pe $\dot{\Omega}$. Cît privește ipotezele asupra funcției φ să observăm că există funcții φ care să le satisfacă. Vom da un exemplu pentru $m = 3$, dar care poate fi cu ușurință generalizat. Fie Φ o funcție reală de clasă $C^{(2)}[0, +\infty)$ și satisfăcînd următoarele condiții:

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi'(\varepsilon) = 0 \quad \Phi''(0) = 0, \quad \Phi''(r) = 0 \text{ pentru } r \geqslant \varepsilon; \int_0^{\varepsilon} \Phi(r)\, dr = 0.$$

Atunci φ definită prin $\varphi(r) = \Phi''(r)$, $r \geqslant 0$, satisface condițiile impuse în lema 4.4.2 funcției φ.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, ținînd seama de condițiile impuse asupra lui Φ avem

$$\int_0^{+\infty} r^2\Phi''(r)dr = \int_0^{\varepsilon} r^2\Phi''(r)\,dr = r^2\Phi'(r)\,|_0^{\varepsilon} - 2r\Phi(r)\,|_0^{\varepsilon} + 2\int_0^{\varepsilon}\Phi(r)\,dr = 0,$$

celelalte condiții pretinse lui φ fiind de asemenea satisfăcute. Să mai remarcăm că, în virtutea faptului că $\varphi(r) = 0$ pentru $r \geqslant \varepsilon$, condiția (4.4.6) se scrie sub forma

$$\int_0^{\varepsilon} r^{m-1}\varphi(r)\,dr = 0. \qquad (4.4.5)''$$

Fie Ψ o funcție reală definită pe $[0, +\infty)$ astfel

$$\Psi(r) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^r \rho^{m-1}\varphi(\rho)\,d\rho}{r^m}, & 0 < r < \infty, \\ 0, & r = 0. \end{cases} \qquad (4.4.7)$$

Din ipotezele făcute asupra lui φ rezultă imediat că Ψ este nulă într-o vecinătate a originii și pentru $r \geqslant \varepsilon$ și satisface pentru $r \geqslant 0$ ecuația diferențială următoare

$$r\Psi'(r) + m\Psi(r) = \varphi(r). \qquad (4.4.8)$$

Să considerăm funcțiile f_i definite astfel:

$$x \in \bar{\Omega},\ x \to f_i(y(x)) = \Psi(\|y(x)\|)\,y_i(x),\quad i = 1, \cdots, m. \qquad (4.4.9)$$

Deoarece $\Psi \in C^{(1)}[0, +\infty)$ și $y_i \in C^{(2)}(\Omega)$, rezultă că funcțiile

$$x \to \Psi(\|y(x)\|)\,y_i(x),\quad i = 1, \cdots, m$$

sînt de clasă $C^{(1)}$ în Ω. Pe de altă parte, oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}$, avem $\|y(x)\| > \varepsilon$, deci cum $\Psi(r) = 0$ pentru $r \geqslant \varepsilon$, rezultă $\Psi(\|y(x)\|) = 0$. Așadar, funcțiile

$$x \to \Psi(\|y(x)\|)\,y_i(x)$$

sînt de clasă $C^{(1)}$ în Ω și se anulează identic într-o vecinătate a lui $\dot{\Omega}$. Fie x arbitrar în Ω. Să calculăm $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij} f_i(y(x))\right)$. Avem:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij} f_i(y(x))\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} f_i(y(x)) + \sum_{i,j,l=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial f_i}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}. \qquad (4.4.10)$$

Dar, ținînd seama de lema (4.4.1), rezultă

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} f_i(y(x)) = f_1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_j} + f_2 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A_{2j}}{\partial x_j} + \cdots + f_m \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A_{mj}}{\partial x_j} = 0. \quad (4.4.11)$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{i,j,l=1}^{m} A_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{l=1}^{m} \mathcal{J}(y(x)\, \delta_{il} \right] \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{J}(y(x)) \frac{\partial f_i}{\partial y_i}. \quad (4.4.12)$$

Dar

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} = \Psi'(\|y\|) \frac{\partial \|y\|}{\partial y_i} \cdot y_i + \Psi(\|y\|) = \Psi'(\|y\|) \frac{y_i^2}{\|y\|} + \Psi(\|y\|)$$

și ținînd seama de (4.4.8), rezultă

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = \Psi'(\|y\|)\, \|y\| + m\Psi(\|y\|) = \varphi(\|y\|) \quad (4.4.13)$$

astfel că (4.4.12) devine

$$\mathcal{J}(y(x)) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = \mathcal{J}(y(x))\, \varphi(\|y(x)\|). \quad (4.4.14)$$

Din (4.4.10), (4.4.11) și (4.4.14) rezultă

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij} f_i(y(x)) \right) = \mathcal{J}(y(x)) \varphi(\|y(x)\|). \quad (4.4.15)$$

Din (4.4.15), prin integrare rezultă

$$\int_{\Omega} \mathcal{J}(y(x)) \varphi(\|y(x)\|)\, dx = \int_{\dot{\Omega}} \left[\sum_{i=1}^{m} A_{ij} f_i(y(x)) \right] n_j\, dS = 0,$$

unde am ținut seama că $f_i(y(x)) = 0$ pentru $x \in \dot{\Omega}$.

La prima vedere, condiția

$$\int_0^{\varepsilon} r^{m-2} \varphi(r) dr = 0$$

pe care am impus-o funcției φ nu a intervenit în demonstrarea lemei 4.4.2. Ea intervine însă atunci cînd se verifică efectiv că φ are proprietățile pe care le-am afirmat (calculele sînt evidente și nu au fost făcute efectiv). De exemplu, faptul că ecuația diferențială (4.4.8) este satisfăcută în $r = \varepsilon$ rezultă astfel: trebuie arătat că

$$\varepsilon\Psi''(\varepsilon) + m\Psi'(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon).$$

Dar, tocmai în virtutea lui (4.4.5'), avem

$$\Psi'(\varepsilon) = \frac{\int_0^\varepsilon \rho^{m-1}\varphi(\rho)\,d\rho}{\varepsilon^m} = 0$$

și deci rămîne de arătat că

$$\varepsilon\psi'(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon),$$

ceea ce se verifică imediat ținînd seama de (4.4.7).

Lema 4.4.2 ne permite să punem următoarea definiție:

DEFINIȚIA 4.4.2. Fie $y : \overline{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\overline{\Omega})$. Fie că $y(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$, z fiind un punct fixat în $E^{(m)}$ și fie Φ o funcție reală pe $[0, +\infty)$ care are următoarele proprietăți:

1° Φ este continuă pe $[0, +\infty)$, se anulează într-o vecinătate a lui $r = 0$ și pentru $r \geqslant \varepsilon$, unde

$$0 < \varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|y(x) - z\| \tag{4.4.16}$$

2°
$$\int_{E^{(m)}} \Phi(\|x\|)\,dx = 1. \tag{4.4.17}$$

Atunci gradul lui Brouwer al aplicației y în raport cu Ω și cu punctul z, $d(y, \Omega, z)$, este definit de

$$d(y, \Omega, z) = \int_\Omega \Phi(\|y(x) - z\|)\mathcal{J}(y(x))\,dx. \tag{4.4.18}$$

Pentru a dovedi că această definiție este corect pusă trebuie, bineînțeles, dovedit că rezultatul integrării în (4.4.18) nu depinde de funcția Φ care satisface ipotezele 1° și 2°. Fie $\mathcal{D}$ spațiul vectorial al funcțiilor reale Φ

definite și continue pe $[0, +\infty)$, nule într-o vecinătate a originii și pentru $r \geqslant \varepsilon$ și fie L, M, N funcționalele liniare definite pe $\mathcal{D}$ astfel :

$$L\Phi = \int_0^{+\infty} r^{m-1}\, \Phi(r)\, \mathrm{d}r \tag{4.4.19}$$

$$M\Phi = \int_{E^{(m)}} \Phi(\|x\|)\, \mathrm{d}x, \tag{4.4.20}$$

$$N\Phi = \int_{\Omega} \Phi(\|y(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y(x)\, \mathrm{d}x. \tag{4.4.21}$$

Vom dovedi că dacă $\Phi \in \mathcal{D}$ și $L\Phi = 0$, atunci $M\Phi = N\Phi = 0$. Într-adevăr, a spune că $\Phi \in \mathcal{D}$ și $L\Phi = 0$ înseamnă a spune că Φ satisface condițiile în care a fost demonstrată lema 4.4.2. Așadar, pentru orice funcție $\Phi \in \mathcal{D}$ ce satisface $L\Phi = 0$, pentru orice Ω deschis și mărginit cu frontieră $\dot{\Omega}$ suficient de regulată și pentru orice funcție $y : \overline{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\overline{\Omega})$, $y(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$, poate fi aplicată concluzia lemei 4.4.2.

Fie $\Phi \in \mathcal{D}$ cu $L\Phi = 0$, $\Omega = \{x / x \in E^{(m)},\ \|x\| < \varepsilon\}$ și $y : \overline{\Omega} \to E^{(m)}$ prin $y(x) = x$. Lema 4.4.2 dă

$$0 = \int\limits_{\{x \in E^{(m)},\, \|x\| < \varepsilon\}} \Phi(\|x\|)\, \mathcal{J}(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\{x \in E^{(m)},\, \|x\| < \varepsilon\}} \Phi(\|x\|)\, \mathrm{d}x = M\Phi$$

Așadar, dacă $\Phi \in \mathcal{D}$ și $L\Phi = 0$, atunci $M\Phi = 0$. Fie acum Ω cel din definiția gradului lui Brouwer, și $y^* : \overline{\Omega} \to E^{(m)}$ prin $y^*(x) = y(x) - z$, unde z este de asemenea cel din definiția gradului lui Brouwer. Evident, $y^*(x) \neq 0$ pentru $x \in \dot{\Omega}$.

Dacă $\Phi \in \mathcal{D}$ și $L\Phi = 0$, lema 4.4.2 dă

$$0 = \int_{\Omega} \Phi(\|y^*(x)\|)\, \mathcal{J}(y^*(x))\, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \Phi(\|y(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, \mathrm{d}x = N\Phi\,.$$

În concluzie, $\Phi \in \mathcal{D}$ și $L\Phi = 0$, implică

$$M\Phi = N\Phi = 0.$$

Vom dovedi acum că definiția pusă pentru gradul lui Brouwer este independentă de funcția Φ.

Fie Φ_1 și Φ_2 două funcții distincte care satisfac condițiile impuse în definiția gradului lui Brouwer, adică $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{D}$ și $M\Phi_1 = M\Phi_2 = 1$. Atunci, funcția $(L\Phi_2)\Phi_1 - (L\Phi_1)\,\Phi_2 \in \mathcal{D}$ și satisface și

$$L[(L\Phi_2)\,\Phi_1 - (L\Phi_1)\,\Phi_2] = 0.$$

Conform celor demonstrate mai sus rezultă că

$$M[(L\Phi_2)\Phi_1 - (L\Phi_1)\Phi_2] = 0 \tag{4.4.22}$$

şi

$$N[(L\Phi_2)\Phi_1 - (L\Phi_1)\Phi_2] = 0. \tag{4.4.23}$$

Din (4.4.22), ţinînd seama că $M\Phi_1 = M\Phi_2 = 1$, rezultă

$$L\Phi_2 = L\Phi_1$$

de care dacă se ţine seama în (4.4.23) (în care N este o funcţională liniară) rezultă

$$N\Phi_1 = N\Phi_2$$

adică

$$\int_\Omega \Phi_1(\|y(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \Phi_2(\|y(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y(x)\, \mathrm{d}x$$

care demonstrează, ţinînd seama de (4.4.18), independenţa definiţiei gradului lui Brouwer de funcţia Φ.

O dată pusă definiţia gradului lui Brouwer pentru funcţii de clasă $C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$, să observăm că formula

$$\mathrm{d}(y, \Omega, z) = \int_\Omega \Phi(\|y(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, \mathrm{d}x$$

are sens şi dacă $y \in C^{(1)}(\Omega)$. Faptul că definiţia gradului lui Brouwer nu depinde de alegerea funcţiei Φ a necesitat însă utilizarea lemei 4.4.2 în demonstrarea căreia a intervenit în mod esenţial faptul că $y \in C^{(2)}(\Omega)$. Aşadar, dacă vom dovedi că lema fundamentală 4.4.2 rămîne adevărată şi în ipoteza că $y \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$, menţinînd toate celelalte ipoteze asupra lui Φ şi y, vom putea pune definiţia gradului lui Brouwer pentru funcţii de clasă $C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$ prin formula (4.4.18), faptul că definiţia este corect pusă avînd aceeaşi demonstraţie ca în cazul în care $y \in C^{(2)}(\Omega) \cap$ $\cap\, C^{(0)}(\bar{\Omega})$.

Vom demonstra într-adevăr,

LEMA 4.4.2′. *Concluzia lemei* 4.4.2 *rămîne adevărată dacă ipoteza* $y \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$ *este înlocuită cu* $y \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$, *toate celelalte ipoteze rămînînd neschimbate.*

Demonstraţie. Din faptul că $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$ şi din $\|y(x)\| > \varepsilon > 0$ pentru $x \in \dot{\Omega}$, rezultă existenţa unui $\varepsilon_1 > \varepsilon$ astfel încît $\|y(x)\| \geqslant \varepsilon_1 > \varepsilon$ pentru

$x \in \dot{\Omega}$. Fie η astfel încît $0 < \eta < \varepsilon_1 - \varepsilon$. Din continuitatea lui y pe $\bar{\Omega}$ cu Ω mărginit, urmează că pentru un astfel de η există $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi x, $x' \in \bar{\Omega}$ cu $\|x - x'\| \leqslant \delta$ avem

$$\|y(x) - y(x')\| \leqslant \eta. \tag{4.4.24}$$

Așadar, oricare ar fi $x \in \bar{\Omega}$ și $x' \in \dot{\Omega}$ cu $\|x - x'\| \leqslant \delta$ este adevărată (4.4.24). Din (4.4.24) urmează însă că

$$|\|y(x)\| - \|y(x')\|| \leqslant \|y(x) - y(x')\| \leqslant \eta$$

sau

$$-\eta \leqslant \|y(x)\| - \|y(x')\| \leqslant \eta,$$

de unde, ținînd seama că $x' \in \dot{\Omega}$ și deci $\|y(x')\| \geqslant \varepsilon_1$, rezultă

$$\|y(x)\| \geqslant \|y(x')\| - \eta \geqslant \varepsilon_1 - \eta > \varepsilon.$$

Fie banda frontieră de lățime δ,

$$\Omega_\delta = \{x \mid x \in \bar{\Omega},\ \rho(x, \dot{\Omega}) \leqslant \delta\}. \tag{4.4.25}$$

Evident, Ω_δ este închisă. Oricare ar fi $x \in \Omega_\delta$, avem $\|y(x)\| > \varepsilon$. Într-adevăr, după o teoremă bine cunoscută (vezi Natanson [50]) dacă A și B sînt mulțimi din $E^{(m)}$ închise, nevide și măcar una dintre ele mărginită, există $x^* \in A$ și $y^* \in B$ astfel încît $\rho(A, B) = \rho(x^*, y^*)$, unde cu $\rho(A, B)$ am notat distanța între A și B. Conform acestei leme, oricare ar fi $x \in \Omega_\delta$, există $x' \in \dot{\Omega}$ astfel încît

$$\rho(x, x') = \rho(x, \dot{\Omega}) \leqslant \delta.$$

Pentru a trage concluzia că $\|y(x)\| > \varepsilon$ putem urma acum raționamentul anterior bazat pe inegalitatea (4.4.24) și pe faptul că $\|y(x')\| \geqslant \varepsilon_1$. Ținînd seama de proprietatea funcției Φ de a se anula pentru $r \geqslant \varepsilon$, rezultă că, deoarece pentru orice $x \in \Omega_\delta$ avem $\|y(x)\| > \varepsilon$, pentru orice $x \in \Omega_\delta$ avem

$$\Phi(\|y(x)\|) = 0. \tag{4.4.26}$$

Fie

$$\Omega_1 = \{x \mid x \in \bar{\Omega},\ \rho(x, \dot{\Omega}) > \delta\}. \tag{4.4.27}$$

Evident, $\Omega_1 \subset \Omega$, Ω_1 este deschis, Ω_1 și Ω_3 sînt disjuncte și $\bar{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_\delta$.

Dacă Ω_1 este vid, atunci $\bar{\Omega} = \Omega_\delta$ şi deci, conform celor de mai sus, oricare ar fi $x \in \bar{\Omega} = \Omega_\delta$ avem (4.4.26), de unde rezultă şi

$$\int_\Omega \Phi(\|y(x)\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, dx = 0$$

şi deci lema 4.4.2 este adevărată.

Dacă Ω_1 nu este vid, este clar că $\dot{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}$. Cum $\Omega_1 \cap \dot{\Omega}_1 = \emptyset$, rezultă că $\dot{\Omega}_1 \subset \Omega_\delta$ deci că $\|y(x)\| > \varepsilon$, $x \in \dot{\Omega}_1$. În plus, distanţa de la orice punct al lui $\dot{\Omega}_1$ la $\dot{\Omega}$ este $\delta > 0$, deci $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Este de asemenea evident că orice bulă închisă centrată într-un punct din $\bar{\Omega}_1$ şi de rază $r \leqslant \delta$ este conţinută în $\bar{\Omega}$. Deoarece orice punct $x \in \Omega$, $x \notin \Omega_1$ este un punct din Ω_δ şi deci, pentru un asemenea punct avem $\Phi(\|y(x)\|) = 0$, rezultă că

$$\int_\Omega \Phi(\|y(x)\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, dx = \int_{\Omega_1} \Phi(\|y(x)\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, dx \qquad (4.4.28)$$

În baza lui (4.4.28), demonstrarea faptului că lema 4.4.2 rămîne valabilă, revine, în cazul în care Ω_1 este nevid, la a demonstra următoarea propoziţie :

Dacă Φ şi y au proprietăţile din lema 4.4.2′ iar Ω_1 este subdomeniul interior lui Ω construit ca mai sus, să se dovedească egalitatea

$$\int_{\Omega_1} \Phi(\|y(x)\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, dx = 0. \qquad (4.4.29)$$

(Să remarcăm că deoarece $\dot{\Omega}_1 \subset \Omega_\delta$, $\|y(x)\| > \varepsilon$ pentru $x \in \dot{\Omega}_1$).

Pentru a demonstra această propoziţie vom face uz de unele rezultate stabilite anterior.

Conform teoremei 4.2.1,

$$(\mathcal{M}_h y)(x) \to y(x) \quad \text{cu} \quad h \to 0 \qquad (4.4.30)$$

oricare ar fi $x \in \bar{\Omega}_1$, uniform cu x. În (4.4.30), prin $(\mathcal{M}_h y)$ se înţelege vectorul de componente $(\mathcal{M}_h y_i)$. Analog,

$$\left(\mathcal{M}_h \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(x) \to \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \quad \text{cu} \quad h \to 0 \qquad (4.4.31)$$

uniform cu x, oricare ar fi $x \in \bar{\Omega}_1$.

Dar, după teorema 4.3.2.4,

$$\left(\mathcal{M}_h \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathcal{M}_h y_i) \tag{4.4.32}$$

oricare ar fi $x \in \Omega - (\Omega \cap \Omega_h)$. Se poate alege h suficient de mic, în orice caz inferior lui δ, astfel încît $\Omega - (\Omega \cap \Omega_h) \supset \overline{\Omega}_1$ și deci (4.4.32) are loc în orice punct $x \in \overline{\Omega}_1$ astfel că, pentru un asemenea h, din (4.4.31) și (4.4.32) rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathcal{M}_h y_i)(x) \to \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \quad \text{cu} \quad h \to 0 \tag{4.4.33}$$

uniform cu $x \in \overline{\Omega}_1$.

Să mai remarcăm că din faptul că $(\mathcal{M}_h y)(x) \to y(x)$ cînd $h \to 0$ uniform cu x în $\overline{\Omega}_1$ și din inegalitatea $\|y(x)\| > \varepsilon$ pe care o satisface y pentru $x \in \dot{\Omega}_1$, rezultă că pentru h suficient de mic avem și $\|(\mathcal{M}_h y)(x)\| > \varepsilon$, $x \in \dot{\Omega}_1$. Cum $(\mathcal{M}_h y)$ este de clasă C^∞, pentru $(\mathcal{M}_h y)$ cu h suficient de mic astfel încît să fie îndeplinite toate condițiile ce au rezultat anterior, concluzia lemei 4.4.2 este adevărată, deci

$$\int_{\Omega_1} \Phi(\|\mathcal{M}_h y)(x)\|)\, \mathcal{J}((\mathcal{M}_h y)(x))\, \mathrm{d}x = 0,$$

ceea ce, ținînd seama de (4.4.30) și (4.4.33), arată că lema 4.4.2 este adevărată și pentru y.

Așa cum am remarcat în timpul demonstrației, faptul că lema fundamentală (lema 4.4.2) este adevărată și pentru funcții de clasă $C^{(1)}(\Omega) \cap \cap C^{(0)}(\overline{\Omega})$ ne permite să punem următoarea definiție a gradului lui Brouwer pentru funcții de clasă $C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\overline{\Omega})$:

DEFINIȚIA 4.4.3. Fie $\overline{\Omega}$ aderența în $E^{(m)}$ a unei mulțimi deschise și mărginite Ω a cărei frontieră să fie $\dot{\Omega}$.

Fie $y : \overline{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\overline{\Omega})$, $y(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$, z fiind un punct fixat în $E^{(m)}$.

Fie Φ o funcție reală pe $[0, +\infty)$ care are următoarele proprietăți:

1° Φ este continuă pe $[0, +\infty)$, se anulează într-o vecinătate a lui $r = 0$ și pentru $r \geqslant \varepsilon$, unde

$$0 < \varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|y(x) - z\|; \tag{4.4.16)'}$$

$$2° \int_{E^{(m)}} \Phi(\|x\|)\, \mathrm{d}x = 1 \tag{4.4.17)'}$$

Atunci, *gradul lui Brouwer* al aplicației y în raport cu Ω și cu punctul z, $d(y, \Omega, z)$, este definit de

$$d(y, \Omega, z) = \int_{\Omega} \Phi(\|y(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y(x))\, dx.$$

Rezultatele care urmează au drept scop să permită extinderea definiției gradului lui Brouwer la funcții de clasă $C^{(0)}(\bar{\Omega})$.

LEMA 4.4.3. *Fie* $y_i : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $i = 1, 2$, $y_i \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$. *Fie că*

$$\|y_i(x)\| > 7\varepsilon, \quad x \in \dot{\Omega}, \quad i = 1, 2, \tag{4.4.34}$$

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| < \varepsilon, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{4.4.35}$$

Atunci

$$d(y_1, \Omega, 0) = d(y_2, \Omega, 0). \tag{4.4.36}$$

Demonstrație. Fie f o funcție reală de clasă $C^{(1)}$ pe $[0, +\infty)$ astfel încît

$$f(r) = 1 \quad 0 \leqslant r \leqslant 2\varepsilon, \quad f(r) = 0, \quad 3\varepsilon \leqslant r < \infty, \tag{4.4.37}$$

$$0 \leqslant f(r) \leqslant 1, \qquad \varepsilon \leqslant r \leqslant 3\varepsilon. \tag{4.4.38}$$

Să observăm că dacă y_3 este o aplicație de la $\bar{\Omega}$ în $E^{(m)}$ definită astfel

$$x \in \bar{\Omega}, \quad x \xrightarrow{y_3} y_3(x) = (1 - f(\|y_1(x)\|))\, y_1(x) + f(\|y_1(x)\|)\, y_2(x), \tag{4.4.39}$$

atunci, în virtutea ipotezelor de regularitate făcute asupra lui f și y_i, $i = 1, 2$, rezultă că $y_3 \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$.

Vom demonstra că:

$$\|y_i(x) - y_k(x)\| < \varepsilon, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad 1 \leqslant i, \quad k \leqslant 3, \tag{4.4.40}$$

$$\|y_i(x)\| > 7\varepsilon, \quad x \in \dot{\Omega}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.4.41}$$

Vom începe cu (4.4.40). Pentru $1 \leqslant i, k \leqslant 2$, (4.4.40) revine la (4.4.35) astfel încît, singurele cazuri de care rămîne să ne ocupăm sînt: $i = 1$, $k = 3$; $i = 2$, $k = 3$.

Fie $i = 1$, $k = 2$. Pentru orice $x \in \bar{\Omega}$, avem:

$$\begin{aligned}\|y_1(x) - y_3(x)\| &= \|y_1(x) - [(1 - f(\|y_1(x)\|))\, y_1(x) + f(\|y_1(x)\|)\, y_2(x)]\| = \\ &= \|f(\|y_1(x)\|)\, (y_1(x) - y_2(x))\| \leqslant f(\|y_1(x)\|)\, \|y_1(x) - y_2(x)\| \leqslant \\ &\leqslant \|y_1(x) - y_2(x)\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

unde am ținut seama de (4.4.38) precum și de (4.4.35).

Fie $i = 2$, $k = 3$. Pentru orice $x \in \bar{\Omega}$, avem

$$\|y_2(x) - y_3(x)\| = \|y_2(x) - [(1 - f(\|y_1(x)\|))\, y_1(x) + f(\|y_1(x)\|)\, y_2(x)\| =$$
$$= \|(1 - f(\|y_1(x)\|))\,(y_2(x) - y_1(x))\| \leqslant \|y_2(x) - y_1(x)\| < \varepsilon,$$

unde am ținut seama de faptul că din (4.4.38) urmează că $1 - f(r) \leqslant 1$ pentru $r \geqslant 0$, precum și de (4.4.35).

Să demonstrăm acum (4.4.41). Pentru $i = 1,2$, (4.4.41) este (4.4.34). Fie $i = 3$. Oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}$, avem (vezi (4.4.34)) $\|y_1(x)\| > 7\varepsilon > 3\varepsilon$, ceea ce, ținînd seama de (4.4.37), atrage că $f(\|y_1(x)\|) = 0$ și deci din (4.4.39) rezultă $y_3(x) = y_1(x)$ iar din (4.4.34) rezultă acum că $\|y_3(x)\| = \|y_1(x)\| > 7\varepsilon$.

Să mai observăm că:

A) dacă $x \in \bar{\Omega}$ este astfel încît $\|y_1(x)\| \geqslant 3\varepsilon$, atunci

$$f(\|y_1(x)\|) = 0 \text{ și deci } y_3(x) = y_1(x);$$

B) dacă $x \in \bar{\Omega}$ este astfel încît $\|y_1(x)\| \in [0, 2\varepsilon]$, atunci

$$f(\|y_1(x)\|) = 1 \text{ și deci } y_3(x) = y_2(x).$$

Fie Φ_i, $i = 1, 2$, două funcții reale continue pe $[0, +\infty)$, nule într-o vecinătate a originii și astfel încît:

$$\Phi_1(r) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 4\varepsilon, \quad 5\varepsilon \leqslant r \leqslant \infty; \tag{4.4.42}$$

$$\Phi_2(r) = 0, \quad \varepsilon \leqslant r < \infty; \tag{4.4.43}$$

$$\int_{E^{(m)}} \Phi_i(\|x\|)\, dx = 1; \quad i = 1, 2. \tag{4.4.44}$$

Oricare ar fi $x \in \bar{\Omega}$, avem:

$$\Phi_1(\|y_1(x)\|)\, \mathcal{J}(y_1(x)) = \Phi_1(\|y_3(x)\|)\, \mathcal{J}(y_3(x)), \tag{4.4.45}$$

$$\Phi_2(\|y_2(x)\|)\, \mathcal{J}(y_2(x)) = \Phi_2(\|y_3(x)\|)\, \mathcal{J}(y_3(x)). \tag{4.4.46}$$

Vom demonstra (4.4.45). Fie $x \in \bar{\Omega}$. Pentru $\|y_1(x)\|$ sînt posibile numai următoarele trei situații:

a) $\|y_1(x)\| \in [0, 2\varepsilon]$,
b) $\|y_1(x)\| \in (2\varepsilon, 3\varepsilon)$,
c) $\|y_1(x)\| \in [3\varepsilon, \infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă sîntem în situaţia a), atunci din (4.4.2) urmează că

$$\Phi_1(\|y_1(x)\|) = 0. \tag{4.4.47}$$

Pe de altă parte, dacă $\|y_1(x)\| \in [0,2\varepsilon]$, conform observaţiei A), avem $y_3(x) = y_2(x)$ şi deci, ţinînd seama de (4.4.35), rezultă că

$$\|y_3(x)\| = \|y_2(x)\| = \|(y_2(x) - y_1(x)) + y_1(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y_2(x) - y_1(x)\| + \|y_1(x)\| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon < 4\varepsilon,$$

ceea ce, ţinînd seama de (4.4.42), atrage că

$$\Phi_1(\|y_3(x)\|) = 0. \tag{4.4.48}$$

Relaţiile (4.4.47), (4.4.48) arată că în situaţia a), egalitatea (4.4.45) este adevărată, ambii membri ai egalităţii fiind nuli.

Fie acum că sîntem în situaţia b). Atunci, pe de o parte, din (4.4.42) rezultă

$$\Phi_1(\|y_1(x)\|) = 0 \tag{4.4.49}$$

iar pe de altă parte, avem

$$\|y_3(x)\| = \|y_1(x) + f(\|y_1(x)\|)\,(y_2(x) - y_1(x))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y_1(x)\| + f(\|y_1(x)\|)\,\|y_2(x) - y_1(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y_1(x)\| + \|y_2(x) - y_1(x)\| < 3\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

şi, în consecinţă,

$$\Phi_1(\|y_3(x)\|) = 0. \tag{4.4.50}$$

Relaţiile (4.4.49), (4.4.50) arată că în situaţia b) egalitatea (4.4.45) este adevărată, ambii membri ai egalităţii fiind nuli.

În sfîrşit, fie că sîntem în situaţia c). Atunci,

$$f(\|y_1(x)\|) = 0, \quad y_3(x) = y_1(x)$$

şi (4.4.45) este evidentă.

Egalitatea (4.4.46) se demonstrează cu argumente similare celor folosite pentru (4.4.45).

Să mai remarcăm că funcţiile Φ_1 şi Φ_2 satisfac toate condiţiile impuse funcţiilor Φ cu care a fost definit gradul lui Brouwer pentru aplicaţii de clasă $C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$ (a se vedea definiţia (4.4.3)). De asemenea, func-

Scanned with OKEN Scanner

țiile y_i, $i = 1, 2, 3$, satisfac condițiile în care a fost pusă definiția 4.4.3 astfel că, din (4.4.45), (4.4.46), rezultă prin integrare pe Ω

$$d(y_1, \Omega, 0) = d(y_3, \Omega, 0)$$

$$d(y_2, \Omega, 0) = d(y_3, \Omega, 0),$$

de unde

$$d(y_1, \Omega, 0) = d(y_2, \Omega, 0)$$

și lema este demonstrată.

LEMA 4.4.4. *Fie* $y_i : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $i = 1, 2$, $y_i \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$. *Fie că*

$$\|y_i(x) - z\| > 7\varepsilon, \quad x \in \dot{\Omega}, \quad i = 1, 2; \tag{4.4.51}$$

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| < \varepsilon, \quad x \in \bar{\Omega} \tag{4.4.52}$$

unde z *este un element fixat în* $E^{(m)}$ *iar* $\varepsilon > 0$.

Atunci,

$$d(y_1, \Omega, z) = d(y_2, \Omega, z). \tag{4.4.53}$$

Demonstrație. Pentru $z = 0$ obținem lema precedentă.

Dacă $z \neq 0$, atunci funcțiile $y_i^* : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, astfel

$$x \in \bar{\Omega}, \quad x \xrightarrow{y_i^*} y_i^*(x) = y_i(x) - z, \quad i = 1, 2,$$

satisfac condițiile lemei 4.4.3 în virtutea faptului că y_i, $i = 1, 2$, le satisfac pe cele ale lemei 4.4.4. Conform lemei 4.4.3, avem

$$d(y_i^*, \Omega, 0) = d(y_2^*, \Omega, 0) \tag{4.4.54}$$

sau

$$d(y_1 - z, \Omega, 0) = d(y_2 - z, \Omega, 0). \tag{4.4.55}$$

Dar din definiția gradului rezultă, evident, că

$$d(y_1 - z, \Omega, 0) = d(y_1, \Omega, z), \tag{4.4.56}$$

$$d(y_2 - z, \Omega, 0) = d(y_2, \Omega, z), \tag{4.4.57}$$

astfel că din (4.4.55), (4.4.56), (4.4.57) rezultă (4.4.53).

LEMA 4.4.5. (Tiestze-Urysohn) [23]. *Fie* $(E; d)$ *un spațiu metric,* A *o parte închisă a lui* E *și* f *o aplicație continuă și mărginită a lui* A *în* R.

Atunci există o aplicație continuă g a lui E în R care coincide cu f pe A și astfel încît

$$\sup_{x\in E} g(x) = \sup_{y\in A} f(y), \tag{4.4.58}$$

$$\inf_{x\in E} g(x) = \inf_{y\in A} f(y). \tag{4.4.59}$$

Demonstrație. Evident, cazul în care f este constantă este banal. Vom presupune de aceea că

$$\sup_{y\in A} f(y) \neq \inf_{z\in A} f(z).$$

Se poate presupune totdeauna că

$$\sup_{y\in A} f(y) = 2, \tag{4.4.60}$$

$$\inf_{y\in A} f(y) = 1. \tag{4.4.61}$$

Într-adevăr, dacă

$$\sup_{y\in A} f(y) = A \neq 2, \ \inf_{y\in A} f(y) = a \neq 1, \ a \neq A,$$

se pot determina constantele α, β astfel încît funcția $\tilde{f}: A \to R$,

$$y \in A, \ \tilde{f}(y) = \alpha f(y) + \beta, \tag{4.4.62}$$

să satisfacă la

$$\sup_{y\in A} \tilde{f}(y) = 2, \tag{4.4.63}$$

$$\inf_{y\in A} \tilde{f}(y) = 1. \tag{4.4.64}$$

Pentru aceasta, este suficient să alegem pe α și β astfel încît să verifice sistemul (obținut luînd superiorul, respectiv inferiorul, pe A în (4.4.62) și ținînd seama de (4.4.63), (4.4.64)):

$$\alpha A + \beta = 2, \ \alpha a + \beta = 1, \ a \neq A.$$

În sfîrșit, să remarcăm că dacă f este continuă pe A, din (4.4.62) rezultă același lucru pentru $\tilde{f}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că am demonstrat lema lui Tiestze-Urysohn pentru $\tilde{f}$, deci că am demonstrat existența unei aplicații continue $\tilde{g}$ a lui E în R care coincide cu $\tilde{f}$ pe A și astfel încît,

$$\sup_{x\in E} \tilde{g}(x) = \sup_{y\in A} \tilde{f}(y) = 2, \tag{4.4.65}$$

$$\inf_{x\in E} \tilde{g}(x) = \inf_{y\in A} \tilde{f}(y) = 1. \tag{4.4.66}$$

Atunci funcția

$$y \in E,\ y \to \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(y) - \frac{\beta}{\alpha} \tag{4.4.67}$$

este o extensie a lui f la E și satisface (4.4.58), (4.4.59). Într-adevăr, dacă $y \in A$,

$$\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(y) - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\tilde{f}(y) - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha f(y) + \beta) - \frac{\beta}{\alpha} = f(y),$$

deci funcția definită de (4.4.67) extinde pe f la E.

Ținînd seama de (4.4.65) și (4.4.62), avem

$$\sup_{y\in E}\left[\frac{1}{\alpha}\tilde{g}(y) - \frac{\beta}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha}\sup_{y\in E}\tilde{g}(y) - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sup_{y\in A}\tilde{f}(y) - \frac{\beta}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sup_{y\in A}[\alpha f(y) + \beta] - \frac{\beta}{\alpha} = \sup_{y\in A} f(y),$$

deci funcția definită de (4.4.67) satisface (4.4.58). Analog se arată că satisface și (4.4.59).

În concluzie, va fi suficient să demonstrăm lema lui Tiestze-Urysohn pentru o funcție reală f continuă și mărginită pe o parte închisă a unui spațiu metric și care satisface (4.4.60), (4.4.61).

Vom indica funcția g a cărei existență este afirmată de lemă. Ea este definită astfel

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ dacă } x \in A \\ \dfrac{\inf\limits_{y\in A}(f(y)\, d(x, y))}{d(x, A)} \text{ dacă } x \in E - A. \end{cases} \tag{4.4.68}$$

Vom verifica direct că g are proprietățile pretinse de lemă. Că g este o extensie a lui f este evident din definiția lui g.

Să dovedim că sînt satisfăcute (4.4.58), (4.4.59). Să remarcăm mai întîi că pentru orice $x \in E$, avem

$$1 \leqslant g(x) \leqslant 2. \tag{4.4.69}$$

Într-adevăr, pentru $x \in A$, (4.4.69) rezultă din faptul că $g(x) = f(x)$ și din (4.4.60) și (4.4.61).

Fie $x \in E - A$. Oricare ar fi $y \in A$ avem $d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) \leqslant$ $\leqslant d(x, y)$ și deci,

$$d(x, y) / d(x, A) \geqslant 1 \tag{4.4.70}$$

Din (4.4.70) și (4.4.68) rezultă :

$$g(x) = \frac{\inf\limits_{y \in A} (f(y)\, d(x, y))}{d(x, A)} = \inf_{y \in A} \left[f(y) \frac{d(x,y)}{d(x, A)} \right] \geqslant \inf_{y \in A} f(y) = 1$$

care demonstrează partea stîngă a dublei inegalități (4.4.69). În ceea ce privește partea dreaptă a dublei inegalități (4.4.69), ea rezultă astfel : oricare ar fi $y \in A$, $f(y) \leqslant \sup\limits_{x \in A} f(x) = 2$ astfel că, ținînd seama și de (4.4.70), din (4.4.68) rezultă

$$g(x) = \frac{\inf\limits_{y \in A} (f(y)\, d(x, y)}{d(x, A)} \leqslant 2 \frac{\inf\limits_{y \in A} d(x, y)}{d(x, A)} = 2 \frac{d(x, A)}{d(x, A)} = 2.$$

Așadar, (4.4.69) este demonstrată. Din (4.4.69) rezultă

$$1 \leqslant \inf_{x \in E} g(x), \sup_{x \in E} g(x) \leqslant 2. \tag{4.4.71}$$

Vom dovedi că avem chiar

$$1 = \inf_{x \in E} g(x), \sup_{x \in E} g(x) = 2.$$

Să presupunem că n-ar fi așa, ceea ce, ținînd seama de (4.4.71), înseamnă să presupunem că

$$1 < \inf_{x \in E} g(x), \sup_{x \in E} g(x) < 2.$$

Atunci, însă, putem scrie

$$1 < \inf_{x \in E} g(x) < \inf_{x \in A} g(x) = \inf_{x \in A} f(x) = 1,$$

ceea ce este absurd.

Scanned with OKEN Scanner

Analog, avem

$$2 > \sup_{x \in E} g(x) \geqslant \sup_{x \in A} g(x) = \sup_{x \in A} f(x) = 2$$

ceea ce, de asemenea, este absurd.

Am demonstrat, așadar, că g definită de (4.4.68) satisface (4.4.5) și (4.4.59).

Să demonstrăm acum continuitatea lui g în orice punct $x \in E$. Fie $x \in E$. Sînt posibile numai următoarele trei situații :

a) $x \in \mathring{A}$ (interiorul lui A),

b) $x \in$ fr. A (frontiera lui A),

c) $x \in E - A$.

Vom analiza pe rînd cele trei cazuri.

a) Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci A este vecinătate pentru x, deci există o bulă deschisă $B(x; r) \subset A$.

Trebuie dovedit că oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi $x' \in E$ cu $\|x - x'\| < \delta$, $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$. Dar f este continuă pe A, deci lui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $\delta_1 > 0$ astfel încît oricare ar fi $x' \in A$ cu $\|x - x'\| < \delta_1$,

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{4.4.72}$$

Fie $\delta = \min(\delta_1, r)$. Oricare ar fi $x' \in E$ cu $\|x - x'\| < \delta$, $x' \in B(x; r) \subset A$ și deci, ținînd seama de (4.4.72), avem

$$|g(x) - g(x')| = |f(x) - g(x')| = |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

ceea ce probează continuitatea lui g în punctele interioare ale lui A.

b) Fie $x \in$ fr $A \subset A$ (A este închisă). Din continuitatea lui f în x (f este continuă pe A prin ipoteză) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încît, oricare ar fi $y \in A \cap B(x; \delta)$, avem

$$|f(y) - f(x)| = |g(y) - g(x)| < \varepsilon. \tag{4.4.73}$$

Fie $C = A \cap B(x; \delta)$ și $D = A - C$. Oricare ar fi $x' \in E - A$ cu $d(x, x') < \frac{\delta}{4}$ și oricare ar fi $y \in D$ avem

$$d(x', y) > \frac{3\delta}{4}. \tag{4.4.74}$$

Într-adevăr, deoarece $y \in D$, $d(x, y) \geqslant \delta$ și deci

$$d(x', y) \geqslant d(y, x) - d(x, x') > \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3\delta}{4}.$$

Din (4.4.74), ţinînd seama că $f(y) > 0$ (reamintim că $1 \leqslant f(y) \leqslant 2$) urmează că

$$f(y)\, d(x', y) > \frac{3\delta}{4} f(y) \geqslant \frac{3\delta}{4} \text{ (căci } f(y) \geqslant 1).$$

Pe de altă parte, în C există puncte z cu proprietatea că

$$f(z)\, d(x', z) < \frac{3\delta}{4}.$$

Într-adevăr, este suficient să alegem pe $z \in C$ astfel încît $d(z, x) < \frac{\delta}{8}$. Atunci avem

$$d(x', z) \leqslant d(x', x) + d(x, z) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{8}$$

din care rezultă

$$f(z)\, d(x', z) < \frac{3\delta}{8} f(z) \leqslant 3\,\frac{\delta}{4} \text{ (căci } f(z) \leqslant 2).$$

În concluzie, dacă $\Psi_{x'}$ este funcţia reală definită pe A astfel

$$y \in A,\ y \xrightarrow{\Psi_{x'}} \Psi_{x'}(y) = f(y)\, d(x', y),$$

unde $x' \in E - A$ şi $d(x, x') < \frac{\delta}{4}$, această funcţie are proprietatea că valorile ei pe D sînt strict mai mari decît $\frac{3\delta}{4}$ în timp ce în C există puncte în care valorile funcţiei sînt strict mai mici decît $\frac{3\delta}{4}$, unde $C + D = A$.

Această observaţie ne permite să afirmăm că dacă ne interesează inferiorul acestei funcţii pe A, atunci este suficient să-l luăm pe mulţimea C, aşadar

$$\inf_{y \in A} [f(y)\, d(x', y)] = \inf_{y \in C} [f(y)\, d(x', y)]. \tag{4.4.75}$$

Ţinînd seama de (4.4.75), putem scrie (vezi (4.4.68)):

$$g(x') = \frac{\inf\limits_{y \in A} [f(y)\, d(x', y)]}{d(x', A)} = \frac{\inf\limits_{y \in C} [f(y)\, d(x', y)]}{d(x', A)}$$

și deci

$$|g(x') - g(x)| = |g(x') - f(x)| = \left| \inf_{y \in C} \left[\frac{[f(y)\, d(x', y)}{d(x', A)} - f(x) \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\inf_{y \in C} [f(y) - f(x)]| < \varepsilon,$$

în obținerea acestei ultime inegalități se ține seama că pentru $y \in C$, este adevărată (4.4.73).

În concluzie, dat fiind $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încît:

A) dacă $y \in A$ și $d(y, x) < \delta$, avem (vezi (4.4.73)):

$$|g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| < \varepsilon;$$

B) dacă $x' \in E - A$ și $d(x', x) < \frac{\delta}{4}$, avem

$$|g(x') - g(x)| < \varepsilon.$$

Din A) și B) rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta = \frac{\delta}{4}$ astfel încît, oricare ar fi $x' \in E$ cu $d(x', x) < \eta$, avem

$$|g(x') - g(x)| < \varepsilon,$$

ceea ce probează continuitatea lui g în punctele frontieră ale lui A.

c) Fie $x \in E - A$. Atunci $g(x) = \frac{h(x)}{d(x, A)}$, unde

$$h(x) = \inf_{y \in A} (f(y)\, d(x, y)). \tag{4.4.76}$$

Ținînd seama că $d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z)$, se demonstrează ușor că

$$|d(x, A) - d(x', A)| \leqslant d(x, x')$$

din care rezultă imediat că aplicația $x \in E$, $x \to d(x, A)$ este uniform continuă pe E.

Pe de altă parte, A fiind închisă și $x \in E - A$, rezultă că $d(x, A) > 0$. Ținînd seama de toate acestea, pentru a demonstra continuitatea lui g în x este suficient să demonstrăm continuitatea lui h în x. Fie $\varepsilon > 0$. Fie $r = d(x, A) > 0$ și $\delta = \min(\varepsilon, r)$. Fie $x' \in E$ cu $d(x, x') < \delta$. Oricare ar fi $y \in A$,

$$d(x, y) \leqslant d(x, x') + d(x', y) < \varepsilon + d(x', y),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde urmează

$$f(y)d(x,y) < \varepsilon f(y) + f(y)d(x',y) \leqslant 2\varepsilon + f(y)\,d(x',y)$$

în care, luînd inferiorul după $y \in A$, se obține

$$h(x) < h(x') + 2\varepsilon. \tag{4.4.77}$$

Analog, pornind de la inegalitatea

$$d(x',y) \leqslant d(x',x) + d(x,y) < \varepsilon + d(x,y)$$

se obține

$$h(x') < h(x) + 2\varepsilon. \tag{4.4.78}$$

Din (4.4.77) și (4.4.78) rezultă

$$|h(x) - h(x')| < 2\varepsilon,$$

ceea ce probează continuitatea lui h (deci a lui g) în $x \in E - A$. O consecință imediată a lemei lui Tiestze-Urysohn este

LEMA 4.4.6. *Fie F o mulțime închisă și mărginită în $E^{(m)}$ și fie $f : F \to E^{(m)}$ o aplicație continuă. Există g continuă în $E^{(m)}$ care coincide cu f pe F.*

Demonstrație. Fie f_i componentele lui f,

$$x \in F,\ x \xrightarrow{f} (f_1(x), \cdots, f_m(x)).$$

Din ipotezele lemei 4.4.6 rezultă că f_i sînt continue pe F (care este închisă și mărginită în $E^{(m)}$) și mărginite. Din lema lui Tiestze-Urysohn rezultă existența funcțiilor continue $g_i : E^{(m)} \to R$, care coincid cu f pe F și astfel încît :

$$\sup_{x \in E^{(m)}} g_i(x) = \sup_{y \in F} f_i(y),$$

$$\inf_{x \in E^{(m)}} g_i(x) = \inf_{y \in F} f_i(y).$$

Pentru a încheia demonstrația este suficient să definim pe g astfel

$$x \in E^{(m)},\ x \xrightarrow{g} (g_1(x), \cdots, g_m(x)).$$

Lemele 4.4.4 și 4.4.6 ne vor permite să punem definiția gradului lui Brouwer pentru funcții continue.

DEFINIȚIA 4.4.4. Fie $\bar{\Omega}$ aderența în $E^{(m)}$ a unei mulțimi deschise și mărginite Ω de frontieră $\dot{\Omega}$.

Fie $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$, $y(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$, z fiind un punct fixat în $E^{(m)}$. Fie y_k, $k \in N$, un șir de aplicații de clasă $C^{(1)}$ în $E^{(m)}$ astfel încît $y_k(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$ și

$$\lim_{k \to \infty} y_k(x) = y(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{4.4.79}$$

convergența fiind uniformă cu $x \in \bar{\Omega}$.

Atunci gradul lui Brouwer al aplicației y în raport cu Ω și cu punctul z este prin definiție

$$d(y, \Omega, z) = \lim_{k \to \infty} d(y_k, \Omega, z). \tag{4.4.80}$$

Definiția 4.4.4 reclamă răspuns la următoarele întrebări :

1) există șiruri de funcții y_k cu proprietățile pretinse de definiția 4.4.4 ?

2) este independent $d(y, \Omega, z)$ de alegerea unui astfel de șir ?

Vom răspunde pe rînd.

1) Aplicația y fiind continuă pe $\bar{\Omega}$, închis și mărginit în $E^{(m)}$, există după lema 4.4.6 o funcție $\tilde{y}$ continuă pe $E^{(m)}$ care extinde pe y. Fie B' o bulă închisă ce conține $\bar{\Omega}$. După teorema lui Weierstrass există un șir de polinoame P_k astfel încît $P_k(x) \to \tilde{y}(x)$, uniform cu $x \in B'$. Polinoamele P_k au însă sens în tot spațiul E. Există deci un șir de funcții de clasă $C^{(\infty)}(E^{(m)})$ (definiția pretindea doar de clasă $C^{(1)}(E^{(m)})$) astfel încît

$$P_k(x) \to \tilde{y}(x)$$

uniform cu $x \in B' \supset \bar{\Omega}$.

REMARCĂ. În răspunsul la prima întrebare nu ne putem dispensa de lema 4.4.6 (consecință a lemei lui Tiestze-Urysohn). Într-adevăr, teorema lui Weierstrass nu poate fi aplicată direct pentru funcția y pe $\bar{\Omega}$ decît în cazul în care asupra frontierei $\dot{\Omega}$ se fac anumite ipoteze de regularitate pe care noi însă nu le-am formulat asupra lui $\dot{\Omega}$ și care nu intervin în demonstrarea lemei lui Tiestze-Urysohn. De aceea a fost necesară obținerea funcției $\tilde{y}$ continuă pe $E^{(m)}$ și considerarea bulei B' a cărei frontieră, evident, permite aplicarea teoremei lui Weierstrass.

2) Independența lui $d(y, \Omega, z)$ de alegerea șirului y_k, $k \in N$, este o consecință a lemei 4.4.4.

Fie, într-adevăr, $y_k^{(1)}$ și $y_k^{(2)}$ două șiruri care satisfac condițiile impuse de definiția 4.4.4.

Să remarcăm că din faptul că $y_k^{(1)}(x) \to y(x)$ uniform cu $x \in \bar{\Omega}$ și din $y(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$, rezultă că $y_k^{(1)}(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$, cel puțin de la un rang încolo.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, funcţia $x \to \|y(x) - z\|$ este continuă şi diferită de zero pe compactul $\dot{\Omega}$. Există deci $x_0 \in \dot{\Omega}$ astfel încît

$$\inf_{x \in \dot{\Omega}} \|y(x) - z\| = \|y(x_0) - z\| > 0. \tag{4.4.81}$$

Fie $\varepsilon > 0$ astfel încît

$$0 < 8\varepsilon < \|y(x_0) - z\|. \tag{4.4.82}$$

Din faptul că sînt adevărate (4.4.81) şi (4.4.82), rezultă că pentru orice $x \in \dot{\Omega}$ avem

$$\|y(x) - z\| > 8\varepsilon > 0. \tag{4.4.83}$$

Dar, deoarece $y_k^{(1)}(x) \to y(x)$ uniform cu $x \in \overline{\Omega}$, rezultă existenţa unui rang $k_0^{(1)}(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $k > k_0^{(1)}(\varepsilon)$ şi $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|y_k^{(1)}(x) - y(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.84}$$

Din (4.4.83) şi (4.4.84) rezultă că pentru $k > k_0^{(1)}(\varepsilon)$ şi $x \in \dot{\Omega}$,

$$\|y_k^{(1)}(x) - z\| = \|(y_k^{(1)}(x) - y(x)) + (y(x) - z)\| \geqslant \|y(x) -$$

$$- z\| - \|y_k^{(1)}(x) - y(x)\| > 8\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = 15\frac{\varepsilon}{2} > 7\varepsilon.$$

Aşadar, pentru $k > k_0^{(1)}(\varepsilon)$ şi $x \in \dot{\Omega}$, avem

$$\|y_k^{(1)}(x) - z\| > 7\varepsilon. \tag{4.4.85}$$

Repetînd raţionamentul pentru $y_k^{(2)}$, rezultă existenţa unui rang $k_0^{(2)}(\varepsilon)$ astfel încît pentru $k > k_0^{(2)}(\varepsilon)$ avem

$$\|y_k^{(2)}(x) - y(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.4.86}$$

şi

$$\|y_k^{(2)}(x) - z\| > 7\varepsilon, \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{4.4.87}$$

Pentru $k > \max(k_0^{(1)}(\varepsilon), k_0^{(2)}(\varepsilon))$ sînt adevărate (4.4.84), (4.4.85), (4.4.86) şi (4.4.87).

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.4.84) și (4.4.86) rezultă că pentru orice $x \in \bar{\Omega}$ și orice $k > \max(k_0^{(1)}(\varepsilon), k_0^{(2)}(\varepsilon))$ avem

$$\|y_k^{(1)}(x) - y_k^{(2)}(x)\| \leqslant \|y_k^{(1)}(x) - y(x)\| + \|y(x) - y_k^{(2)}(x)\| < \varepsilon. \quad (4.4.88)$$

Relațiile (4.4.85), (4.4.87) și (4.4.88) arată că pentru $k > \max(k_0^{(1)}(\varepsilon), k_0^{(2)}(\varepsilon))$ funcțiile $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ de clasă $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ satisfac ipotezele lemei 4.4.4. În concluzie, pentru $k > \max(k_0^{(1)}(\varepsilon), k_0^{(2)}(\varepsilon))$,

$$d(y_k^{(1)}, \Omega, z) = d(y_k^{(2)}, \Omega, z)$$

de unde urmează că avem și

$$\lim_{k\to\infty} d(y_k^{(1)}, \Omega, z) = \lim_{k\to\infty} d(y_k^{(2)}, \Omega, z)$$

ceea ce, ținînd seama de (4.4.80), demonstrează independența lui $d(y, \Omega, z)$ de șirul de funcții y_k ce satisfac exigențele definiției 4.4.4.

§ 4.5. Cîteva proprietăți ale gradului lui Brouwer [56]

TEOREMA 4.5.1. (Aditivitatea lui $d(y, \Omega, z)$ ca funcție de domeniu). *Fie $\bar{\Omega}_1$ și $\bar{\Omega}_2$ aderențele în $E^{(m)}$ a două mulțimi deschise, mărginite și disjuncte Ω_1 respectiv Ω_2, de frontiere $\dot{\Omega}_1$ respectiv $\dot{\Omega}_2$. Fie că aplicația*

$$y : \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \to E^{(m)}$$

este continuă în $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ și că $y(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}_1 \cup \dot{\Omega}_2$, z fiind un element fixat în $E^{(m)}$. Atunci avem:

$$d(y, \Omega_1 + \Omega_2, z) = d(y, \Omega_1, z) + d(y, \Omega_2, z). \quad (4.5.1)$$

Demonstrație. Fie y_k un șir de funcții de clasă $C^{(1)}$ în $E^{(m)}$ care satisfac exigențele definiției 4.4.4. Avem

$$d(y, \Omega_1 + \Omega_2, z) = \lim_{k\to\infty} d(y_k, \Omega_1 + \Omega_2, z) = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1+\Omega_2} \Phi(\|y_k(x) -$$

$$-z\|)\, \mathcal{J}(y_k(x))\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} \Phi(\|y_k(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y_k(x))\, dx +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_2} \Phi(\|y_k(x) - z\|)\, \mathcal{J}(y_k(x))\, dx = d(y, \Omega_1, z) + d(y, \Omega_2, z).$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 4.5.2. *Fie* $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$, $y(x) \neq z$ *pentru* $x \in \dot{\Omega}$, *cu* z *fixat în* $E^{(m)}$. *Dacă* $d(y, \Omega, z) \neq 0$, *atunci ecuaţia* $y(x) = z$ *are în* Ω *cel puţin o soluţie.*

Demonstraţie. Să presupunem contrariul, deci că oricare ar fi $x \in \Omega$, $y(x) \neq z$. Asociind la această presupunere faptul că prin ipoteză $y(x) \neq z$ pentru orice $x \in \dot{\Omega}$, ar rezulta că $y(x) \neq z$ oricare ar fi $x \in \bar{\Omega}$. Cum însă aplicaţia $x \to \|y(x) - z\|$ este continuă pe $\bar{\Omega}$, rezultă după un raţionament pe care l-am mai făcut (vezi răspunsul la întrebarea a doua ce urmează definiţiei 4.4.4) că există $\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\|y(x) - z\| > 2\varepsilon, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{4.5.2}$$

Fie y_k un şir de funcţii de clasă $C^{(1)}(E^{(m)})$ care satisfac exigenţele definiţiei 4.4.4.

Cum $y_k(x) \to y(x)$ uniform cu $x \in \bar{\Omega}$, rezultă că există un rang k_0 astfel încît pentru $k > k_0$ şi orice $x \in \bar{\Omega}$,

$$\|y_k(x) - y(x)\| < \varepsilon. \tag{4.5.3}$$

Din (4.5.3) şi (4.5.2) rezultă că pentru $k > k_0$ şi orice $x \in \bar{\Omega}$, avem

$$\|y_k(x) - z\| > \varepsilon. \tag{4.5.4}$$

Din (4.5.4) urmează că pentru $k > k_0$,

$$\Phi(\|y_k(x) - z\|) = 0, \tag{4.5.5}$$

unde Φ este funcţia reală din definiţia (4.4.3) care, se ştie, are proprietatea $\Phi(r) = 0$ pentru $r \geqslant \varepsilon$, ε fiind dat de (4.5.4). Din (4.5.5) urmează că, pentru $k > k_0$,

$$d(y_k, \Omega, z) = \int_\Omega \Phi(\|y_k(x) - z\|) \mathcal{J}(y_k(x))\, dx = 0, \tag{4.5.6}$$

iar din (4.5.6) urmează că

$$d(y, \Omega, z) = \lim_{k \to \infty} d(y_k, \Omega, z) = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza (4.5.2) care afirmă că $d(y, \Omega, z) \neq 0$. Presupunerea că pentru orice $x \in \Omega$ avem $y(x) \neq z$ este deci falsă. În concluzie, există cel puţin un $\xi \in \Omega$ astfel încît $y(\xi) = z$.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 4.5.3. *Fie Ω deschis și mărginit în $E^{(m)}$ și I un interval închis al dreptei reale, $a \leqslant \tau \leqslant b$. Fie $y : \bar{\Omega} \times I \to E^{(m)}$ o aplicație continuă astfel încît $y(x, \tau) \neq z$ pentru orice $(x, \tau) \in \dot{\Omega} \times I$, z fiind un punct fixat în $E^{(m)}$.*

Să considerăm pentru fiecare $\tau \in I$ aplicația $y_{(\tau)} : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$ astfel

$$x \in \bar{\Omega}, \quad x \xrightarrow{y_{(\tau)}} y_{(\tau)}(x) = y(x, \tau).$$

În aceste condiții, $d(y_{(\tau)}, \Omega, z)$ este constant în raport cu τ.

Demonstrație. Din continuitatea aplicației y pe $\bar{\Omega} \times I$ deci și pe $\dot{\Omega} \times I$ și din faptul că $\|y(x, \tau) - z\| > 0$ oricare ar fi $(x, \tau) \in \dot{\Omega} \times I$, rezultă existența unui $\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\|y(x, \tau) - z\| > 8\varepsilon, \qquad (x, \tau) \in \dot{\Omega} \times I. \tag{4.5.7}$$

Pe de altă parte, y este continuă pe compactul $\bar{\Omega} \times I$ din $E^{(m)} \times R$, deci uniform continuă. În consecință, pentru ε pentru care are loc (4.5.7), există $\delta(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi (x_1, τ_1) și (x_2, τ_2) din $\bar{\Omega} \times I$ cu

$$\|(x_1, \tau_1) - (x_2, \tau_2)\|_{E^{(m)} \times R} = \|x_1 - x_2\|_{E^{(m)}} + |\tau_1 - \tau_2| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

avem

$$\|y(x_1, \tau_1) - y(x_2, \tau_2)\| < \varepsilon.$$

În particular, oricare ar fi (x, τ_1) și $(x, \tau_2) \in \bar{\Omega} \times I$ cu $\|(x, \tau_1) - (x, \tau_2)\|_{E^{(m)} \times R} = |\tau_1 - \tau_2| < \delta(\varepsilon)$, avem

$$\|y(x, \tau_1) - y(x, \tau_2)\| < \varepsilon. \tag{4.5.8}$$

În concluzie, pentru $\varepsilon > 0$ pentru care are loc (4.5.7), există $\delta(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $x \in \bar{\Omega}$ și $\tau_1, \tau_2 \in I$ cu $|\tau_1 - \tau_2| < \delta(\varepsilon)$, avem (4.5.8).

Fie τ_1 și τ_2 două puncte din I astfel încît $|\tau_1 - \tau_2| < \delta(\varepsilon)$ și fie funcțiile $y_{(\tau_1)}$ și $y_{(\tau_2)}$. Fie $y_k^{(1)}$ și $y_k^{(2)}$ două șiruri de funcții de clasă $C^{(1)}(E^{(m)})$ care satisfac condițiile impuse de definiția gradului lui Brouwer pentru funcțiile continue pe $\bar{\Omega}$, $y_{(\tau_1)}$ și $y_{(\tau_2)}$.

Din faptul că $y_k^{(1)}(x) \to y_{(\tau_1)}(x)$ uniform cu $x \in \bar{\Omega}$, rezultă existența unui rang $k_0^{(1)}$ astfel încît

$$\|y_k^{(1)}(x) - y_{(\tau_1)}(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.9}$$

pentru orice $x \in \bar{\Omega}$ și orice $k > k_0^{(1)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Analog, există un rang $k_0^{(2)}$ astfel încît

$$\|y_k^{(2)}(x) - y_{(\tau_2)}(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.10}$$

pentru orice $x \in \bar{\Omega}$ şi orice $k > k_0^{(2)}$.

Pentru $k > \max(k_0^{(1)}, k_0^{(2)})$ este adevărată şi (4.5.9) şi (4.5.10), oricare ar fi $x \in \bar{\Omega}$.

Din (4.5.9) şi (4.5.10) rezultă că pentru orice $k > \max(k_0^{(1)}, k_0^{(2)})$ şi orice $x \in \bar{\Omega}$, avem

$$\|y_k^{(1)}(x) - y_k^{(2)}(x)\| < \varepsilon. \tag{4.5.11}$$

Pe de altă parte, din (4.5.7) care este valabilă oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}$ şi $\tau \in I$, se obţine

$$\|y(x, \tau_1) - z\| > 8\varepsilon, \quad x \in \dot{\Omega},$$

care se mai scrie

$$\|y_{(\tau_1)}(x) - z\| > 8\varepsilon, \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{4.5.12}$$

Analog se obţine

$$\|y_{(\tau_2)})x) - z\| > 8\varepsilon, \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{4.5.13}$$

Din (4.5.9) şi (4.5.12) rezultă

$$\|y_k^{(1)}(x) - z\| > \frac{15\varepsilon}{2} > 7\varepsilon, \quad k > k_0^{(1)}, \quad x \in \dot{\Omega}, \tag{4.5.14}$$

iar din (4.5.10) şi (4.5.13) rezultă

$$\|y_k^{(2)}(x) - z\| > 7\varepsilon, \quad k > k_0^{(2)}, \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{4.5.15}$$

Pentru $k > \max(k_0^{(1)}, k_0^{(2)})$ şi $x \in \dot{\Omega}$ este adevărată atît (4.5.14) cît şi (4.5.15) şi (4.5.11), aceasta din urmă pentru orice $x \in \bar{\Omega}$. Aceasta înseamnă că pentru $k > \max(k_0^{(1)}, k_0^{(2)})$, funcţiile $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ îndeplinesc condiţiile lemei 4.4.4 şi deci

$$d(y_k^{(1)}, \Omega, z) = d(y_k^{(2)}, \Omega, z)$$

de unde, prin trecere la limită cu $k \to \infty$, se obţine

$$d(y_{(\tau_1)}, \Omega, z) = d(y_{(\tau_2)}, \Omega, z). \tag{4.5.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea (4.5.16) este adevărată însă numai pentru punctele τ_1, $\tau_2 \in I$ cu $|\tau_1 - \tau_2| \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Fie acum τ_1 și τ_2 două puncte arbitrare din I. Avem

$$d(y_{(\tau_1)}, \Omega, z) = d(y_{(\tau_2)}, \Omega, z).$$

Într-adevăr, nu avem decît să considerăm o diviziune a intervalului $[\tau_1, \tau_2]$ de normă inferioară lui $\delta(\varepsilon)$ și să aplicăm din aproape în aproape (4.5.16).

O consecință imediată a teoremei 4.5.3 este celebra teoremă a lui Brouwer.

TEOREMA 4.5.4. (Teorema lui Brouwer). *Fie y o aplicație continuă a bulei închise $B'(0;1) = \{x \mid x \in E^{(m)}, \|x\| \leqslant 1\}$ în ea însăși. Atunci y are cel puțin un punct fix (există cel puțin un punct ξ, $\|\xi\| \leqslant 1$ astfel încît $y(\xi) = \xi$).*

Demonstrație. Să considerăm coaja bulei închise din teorema lui Brouwer, $S(0,1) = \{x \mid x \in E^{(m)}, \|x\| = 1\}$. Sînt posibile numai următoarele situații:

A) Există un punct $\xi \in S(0;1)$ astfel încît $y(\xi) = \xi$;

B) Oricare ar fi $x \in S(0,1)$, $y(x) \neq x$.

Dacă se întîmplă situația A), nu mai avem ce demonstra.

Dacă se întîmplă situația B), deci dacă y nu are nici un punct fix pe coaja bulei închise centrată în zero și de rază unitară, atunci vom demonstra că y are cel puțin un punct fix în bula deschisă $B(0;1) = \{x \mid x \in E^{(m)}, \|x\| < 1\}$.

Să notăm

$$\Omega = B(0;1), \qquad \bar{\Omega} = B'(0;1), \qquad \dot{\Omega} = S(0;1) \tag{4.5.17}$$

și fie

$$\tilde{y} : \bar{\Omega} \times [0,1] \to E^{(m)}$$

după cum urmează:

$$(x, \tau) \in \bar{\Omega} \times [0,1], \ (x, \tau) \xrightarrow{\tilde{y}} \tilde{y}(x, \tau) = x - \tau y(x). \tag{4.5.18}$$

Vom dovedi că aplicația $\tilde{y}$ satisface ipotezele teoremei 4.5.3 cu Ω, $\bar{\Omega}$, $\dot{\Omega}$ definite de (4.5.17) și $z = 0$.

Într-adevăr;

1) $\tilde{y}$ este continuă pe $\bar{\Omega} \times [0,1]$, ceea ce rezultă imediat din (4.5.18) ținînd seama că y este continuă pe $\bar{\Omega}$;

2) oricare ar fi $(x, \tau) \in \dot{\Omega} \times [0,1]$ (deci oricare ar fi x cu $\|x\| = 1$ $0 \leqslant \tau \leqslant 1$), avem $y(x, \tau) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, pentru $x \in \dot{\Omega}$ și $\tau \in [0,1)$ avem

$$\|\widetilde{y}(x, \tau) - 0\| = \|\widetilde{y}(x, \tau)\| = \|x - \tau y(x)\| \geqslant \|x\| - \tau\|y(x)\| =$$

$$= 1 - \tau \|y(x)\| \geqslant 1 - \tau > 0,$$

unde am ținut seama că y aplică bula închisă de rază unitate în ea însăși și deci, oricare ar fi $x \in B'(0,1)$, $\|y(x)\| \leqslant 1$. Pentru $x \in \dot{\Omega}$ și $\tau = 1$, (cazul lăsat la o parte mai sus), avem

$$\|\widetilde{y}(x, 1) - 0\| = \|\widetilde{y}(x, 1)\| = \|x - y(x)\| > 0$$

căci în cazul în care am avea $\|x - y(x)\| = 0$ adică $y(x) = x$ cu $x \in \dot{\Omega} = S(0,1)$, ar rezulta că nu sîntem în situația B), ci în situația A).

Condițiile teoremei 4.5.3 fiind satisfăcute, rezultă din această teoremă că pentru orice $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$, avem

$$d(\widetilde{y}_{(\tau_1)}, \Omega, 0) = d(\widetilde{y}_{(\tau_2)}, \Omega, 0).$$

În particular, pentru $\tau_1 = 1$ și $\tau_2 = 0$, avem

$$d(\widetilde{y}_{(1)}, \Omega, 0) = d(\widetilde{y}_{(0)}, \Omega, 0). \tag{4.5.19}$$

Dar ținînd seama de (4.5.18) precum și de modul în care sînt definite funcțiile $\widetilde{y}_{(\tau)}$ (vezi teorema anterioară), avem

$$x \in \overline{\Omega}, \qquad \widetilde{y}_{(0)} = \widetilde{y}(x, 0) = x$$

și deci

$$d(\widetilde{y}_{(0)}, \Omega, 0) = \int_{\Omega} \Phi(\|x - 0\|) \mathcal{J}(x)\, dx = \int_{\{x \in E^{(m)},\ \|x\| < 1\}} \Phi(\|x\|)\, dx = 1 \tag{4.5.20}$$

căci pentru $x \in \dot{\Omega} = S(0;1)$ avem $\|\widetilde{y}_{(0)}(x) - 0\| = \|x\| = 1$ și deci 1 joacă rolul lui ε din definiția gradului pentru funcții de clasă $C^{(1)}$ (cum este, evident, $\widetilde{y}_{(0)}$).

Or, se știe că Φ are proprietatea

$$\int_{E^{(m)}} \Phi(\|x\|)\, dx = \int_{\{x \in E^{(m)},\ \|x\| < \varepsilon\}} \Phi(\|x\|)\, dx = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.5.19) și (4.5.20) rezultă

$$d(\tilde{y}_{(1)},\ \Omega,\ 0) = 1,$$

deci

$$d(\tilde{y}_{(1)},\ \Omega,\ 0) \neq 0$$

ceea ce, ținînd seama de teorema (4.5.2), atrage că există cel puțin un punct $\xi \in \Omega$, astfel încît $\tilde{y}_{(1)}(\xi) = \xi$, egalitate care, ținînd seama de (4.5.17) și (4.5.18), exprimă faptul că există cel puțin un punct ξ cu $\|\xi\| < 1$ astfel încît

$$\xi - y(\xi) = 0.$$

Teorema este demonstrată.

REMARCA 1. Teorema lui Brouwer a fost enunțată și demonstrată pentru bula închisă centrată în origine și de rază unitate. Evident, demonstrația poate fi refăcută pentru orice altă bulă închisă din E.

REMARCA 2. Teorema lui Brouwer a fost folosită deja în capitolul III pentru demonstrarea teoremei de surjectivitate a lui Browder (a se vedea lema 3.2.4).

§ 4.6. Noțiunea de indice al unei aplicații continue

Scopul teoremelor care urmează este de a evalua $d(y, \Omega, z)$ cu ajutorul zerourilor aplicației $x \to y(x) - z$, $x \in \bar{\Omega}$, și de a demonstra că $d(y, \Omega, z)$ este un întreg.

LEMA 4.6.1. *Fie* $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$, $y(x) - z \neq 0$ *pentru* $x \in \dot{\Omega}$, z *fiind un punct fixat în* $E^{(m)}$.

Fie F *mulțimea închisă formată din toate elementele* $x \in \bar{\Omega}$ *care sînt soluții ale ecuației* $y(x) = z$ *și fie* Ω_0 *o mulțime deschisă a lui* Ω *care conține* F. *Atunci,*

$$d(y, \Omega, z) = d(y,\ \Omega_0,\ z). \tag{4.6.1}$$

Demonstrație. Prin ipoteză, mulțimea deschisă $\Omega_0 \subset \Omega$ conține toate zerourile din $\bar{\Omega}$ ale ecuației $y(x) - z = 0$. De aici rezultă că oricare ar fi $x \in \bar{\Omega} - \Omega_0$, avem $y(x) - z \neq 0$. Din faptul că aplicația $x \to \|y(x) - z\|$ este continuă pe mulțimea închisă și mărginită $\bar{\Omega} - \Omega_0 \subset E^{(m)}$ și din $y(x) - z \neq 0$ pentru orice $x \in \bar{\Omega} - \Omega_0$, rezultă existența unui $\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\|y(x) - z\| > 2\varepsilon, \qquad x \in \bar{\Omega} - \Omega_0. \tag{4.6.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie y_k un şir de aplicaţii de clasă $C^{(1)}(E^{(m)})$ satisfăcînd cerinţele definiţiei 4.4.4.

Din faptul că $y_k(x) \to y(x)$ uniform cu $x \in \bar{\Omega}$, rezultă că pentru ε, pentru care avem (4.6.2), există un rang $k_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $k > k_0(\varepsilon)$

$$\|y_k(x) - y(x)\| < \varepsilon \tag{4.6.3}$$

oricare ar fi $x \in \bar{\Omega} - \Omega_0$.

Din (4.6.2) şi (4.6.3) urmează că pentru $k > k_0(\varepsilon)$ şi pentru orice $x \in \bar{\Omega} - \Omega_0$, avem

$$\|y_k(x) - z\| > \varepsilon \tag{4.6.4}$$

Să calculăm $d(y_k, \Omega, z)$ pentru $k > k_0(\varepsilon)$.

Fie Φ satisfăcînd condiţiile din definiţia (4.4.3). Avem :

$$d(y_k, \Omega, z) = \int_{\Omega} \Phi(\|y_k(x) - z\|) \mathcal{J}(y_k(x))\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} \Phi(\|y_k(x) - z\|) \mathcal{J}(y_k(x))\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega - \Omega_0} \Phi(\|y_k(x) - z\|) \mathcal{J}(y_k(x))\, dx.$$

Dar $\Omega - \Omega_0 \subset \bar{\Omega} - \Omega_0$ iar pentru orice $x \in \bar{\Omega} - \Omega_0$ este adevărată (4.6.4) ceea ce, ţinînd seama de proprietăţile funcţiei Φ, atrage că $\Phi(\|y_k(x) - z\|) = 0$ astfel că (4.6.5) se reduce la

$$d(y_k, \Omega, z) = \int_{\Omega_0} \Phi(\|y_k(x) - z\|) \mathcal{J}(y_k(x))\, dx = d(y_k, \Omega_0, z). \tag{4.6.6}$$

Trecînd la limită cu $k \to \infty$ în (4.6.6), se obţine (4.6.1).

DEFINIŢIA 4.6.1. Fie $B'(x_0; \rho)$ aderenţa în $E^{(m)}$ a bulei deschise $B(x_0; \rho) = \{x \mid x \in E^{(m)}, \|x - x_0\| < \rho\}$ şi fie $y : B'(x_0; \rho) \to E^{(m)}$ o aplicaţie continuă cu proprietatea că $y(x) \neq y(x_0)$, oricare ar fi $x \in B'(x_0; \rho)$, $x \neq x_0$. Atunci, indicele aplicaţiei y în punctul x_0, $i(y; x_0)$, este definit de

$$i(y; x_0) = d(y, B(x_0; \rho), y(x_0)). \tag{4.6.7}$$

Bineînţeles, această definiţie nu se justifică decît dacă demonstrăm că în (4.6.7), $d(y, B(x_0; \rho), y(x_0))$ este independent de ρ. Fie, într-adevăr, o altă bulă deschisă $B(x_0; \rho')$ satisfăcînd toate condiţiile impuse lui

Scanned with OKEN Scanner

$B(x_0;\ \rho)$ de definiția (4.6.1). Să presupunem că $\rho' < \rho$ (dacă $\rho' > \rho$ demonstrația se face analog). Aplicînd lema 4.6.1 pentru

$$\Omega = B(x_0;\ \rho')$$

$$F = \{x \mid x \in \bar{\Omega} = B'(x_0;\ \rho'),\ y(x) = y(x_0)\} = \{x_0\}$$

$$\Omega_0 = B(x_0;\ \rho) \supset F = \{x_0\},$$

obținem

$$d(y,\ B(x_0;\ \rho'),\ y(x_0)) = d(y,\ B(x_0,\ \rho),\ y(x_0)),$$

ceea ce justifică definiția 4.6.1.

TEOREMA 4.6.1. *Fie* $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$ *și fie* z *un punct fixat în* $E^{(m)}$. *Presupunem că ecuația* $y(x) = z$ *are un număr finit de soluții* $x_1, \ldots, x_p$, *toate aparținînd lui* Ω. *Atunci*

$$d(y,\ \Omega,\ z) = \sum_{q=1}^{p} i(y;\ x_q). \tag{4.6.8}$$

Demonstrație. Este suficient să ținem seama de teorema 4.5.1 (care exprimă aditivitatea lui $d(y, \Omega, z)$ ca funcție de domeniu) și de lema 4.6.1.

Fie bulele deschise $B(x_q;\ \rho_q)$, $q = 1, \ldots, p$, disjuncte și astfel încît $\Omega_0 = \bigcup_{q=1}^{p} B(x_q;\ \rho_q) \subset \Omega$.

Aplicînd lema 4.6.1 avem

$$d(y,\ \Omega,\ z) = d(y,\ \Omega_0,\ z). \tag{4.6.9}$$

Dar după teorema 4.5.1,

$$d(y, \Omega_0, z) = \sum_{q=1}^{p} d(y,\ B(x_q;\ \rho_q),\ z) =$$

$$= \sum_{q=1}^{p} d(y, B(x_q;\ \rho_q),\ y(x_q)) = \sum_{q=1}^{h} i(y;\ x_q). \tag{4.6.10}$$

Din (4.6.9) și (4.6.10) rezultă (4.6.8).

TEOREMA 4.6.2. *Fie* y *o aplicație de clasă* $C^{(1)}$ *într-o vecinătate* V *a punctului* x_0. *Fie că* $j(x_0) = \mathcal{J}(y(x_0)) \neq 0$. *Atunci,*

$$i(y;\ x_0) = \frac{j(x_0)}{|j(x_0)|} = \pm 1. \tag{4.6.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fiind o vecinătate a lui x_0, V conține o mulțime deschisă $\mathcal{D}$ care-l conține pe x_0: $V \supset \mathcal{D} \ni x_0$.

Mulțimea $\mathcal{D}$ fiind deschisă și $x_0 \in \mathcal{D}$, există o bulă deschisă $B(x_0; \rho^*) \subset \mathcal{D}$. Fie $\rho_1 < \rho^*$ și bula închisă $B'(x_0; \rho_1)$. Evident, avem

$$x_0 \in B'(x_0; \rho_1) \subset B(x_0; \rho^*) \subset \mathcal{D} \subset V.$$

În concluzie, pentru vecinătatea $V(x_0)$ a punctului x_0 se poate determina $\rho_1 > 0$ astfel încît

$$x_0 \in B'(x_0; \rho_1) \subset V. \tag{4.6.12}$$

Pe de altă parte, din faptul că y este de clasă $C^{(1)}$ în $V(x_0)$ rezultă că y este diferențiabilă în sens Fréchet în x_0 (a se vedea [23]) și deci, există $\rho_2 > 0$ astfel încît, oricare ar fi $x \in B'(x_0; \rho_2) \cap V(x_0)$, avem

$$y(x) - y(x_0) = A(x - x_0) + R(x), \tag{4.6.13}$$

unde A este un operator liniar de la $E^{(m)}$ la $E^{(m)}$ reprezentat de o matrice pătratică de ordinul m ale cărei elemente sînt $a_{ij} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{x=x_0}$ și deci $\det A = j(x_0) \neq 0$, iar R este o aplicație de clasă $C^{(1)}$ în $V(x_0) \cap B'(x_0; \rho_2)$ astfel încît, pentru orice $x \in V(x_0) \cap B'(x_0; \rho)$, $0 < \rho \leqslant \rho_2$, avem următoarea estimare: $\|R(x)\| \leqslant \eta(\rho)\|x - x_0\|$, cu $\lim\limits_{\rho \to 0} \eta(\rho) = 0$.

Fie $\rho_0 = \min(\rho_1, \rho_2)$.

Comparînd (4.6.12) cu (4.6.13), rezultă: din faptul că y este de clasă $C^{(1)}$ în $V(x_0)$, rezultă existența unui $\rho_0 > 0$ astfel încît $B'(x_0; \rho_0) \subset V(x_0)$ și oricare ar fi $x \in B'(x_0; \rho)$ $(0 < \rho \leqslant \rho_0)$ avem

$$y(x) - y(x_0) = A(x - x_0) + R(x), \tag{4.6.14}$$

unde A este un operator liniar de la $E^{(m)}$ la $E^{(m)}$ reprezentat de o matrice pătratică de ordinul m ale cărei elemente sînt $a_{ij} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{x=x_0}$ și deci al cărei determinant este $\det A = j(x_0) \neq 0$ iar R este o aplicație de clasă $C^{(1)}$ în $B'(x_0; \rho_0)$ cu proprietatea că pentru orice $x \in B'(x_0; \rho)$, $0 < \rho \leqslant \rho_0$, avem estimarea

$$\|R(x)\| \leqslant \eta(\rho)\|x - x_0\| \quad \text{cu} \quad \lim_{\rho \to 0} \eta(\rho) = 0. \tag{4.6.15}$$

Se știe că putem totdeauna reprezenta matricea A sub forma

$$A = SP$$

Scanned with OKEN Scanner

cu S și P matrici pătratice, S ortogonală și P simetrică și pozitiv definită (este suficient să luăm $P = (A^{tr}A)^{1/2}$).

Fie $y : B'(x_0; \rho) \times [0,1] \to E^{(m)}$ după cum urmează :

$$(x, \tau) \in B'(x_0; \rho) \times [0,1], \quad (x, \tau) \xrightarrow{y} y(x, \tau) = y(x_0) +$$

$$+ S[((1 - \tau)P + \tau I)(x - x_0)] + (1 - \tau) R(x), \tag{4.6.16}$$

cu I matricea unitate.

Să remarcăm că din faptul că P este pozitiv definită, rezultă existența unei constante $c > 0$ astfel încît pentru orice $x \in E^{(m)}$ și pentru orice $\tau \in [0,1]$, avem

$$\|((1 - \tau)P + \tau I)x\| \geqslant c\|x\|. \tag{4.6.17}$$

Într-adevăr, P fiind pozitiv definită, există o constantă $\mu_0 > 0$ astfel încît oricare ar fi $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E^{(m)}$, $\xi \neq 0$, avem

$$p_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2 = \mu_0\|\xi\|^2. \tag{4.6.18}$$

Fie în (4.6.18) că ξ este un vector propriu al lui P corespunzător valorii proprii λ (reală căci P este simetrică). Atunci avem

$$\mu_0\|\xi\|^2 \leqslant p_{ij}\xi_i\xi_j = (p_{ij}\xi_i)\xi_j = \lambda \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 = \lambda\|\xi\|^2,$$

din care se obține că oricare ar fi λ, valoare proprie a matricei P, $\lambda \geqslant \mu_0 > 0$. Dar din faptul că P este simetrică rezultă că matricea $(1 - \tau)P + \tau I$ este de asemenea simetrică și orice valoare proprie a ei este de forma $(1 - \tau)\lambda + \tau \cdot 1$, unde λ este o valoare proprie a matricei P iar $\tau \in [0,1]$. Prin urmare, orice valoare proprie a matricei $(1 - \tau)P + \tau I$ este mai mare sau egală cu $\min(1, \lambda)$, unde λ este aceea dintre valorile proprii ale matricei P cu care valoarea proprie a matricei $(1 - \tau)P + \tau I$ despre care este vorba se scrie sub forma $(1 - \tau)\lambda + \tau \cdot 1$. Este evident acum că c pentru care avem (4.6.17) poate fi de exemplu $c = \min_{\lambda \in \Lambda} (\min(1, \lambda))$, unde cu Λ a fost notată mulțimea valorilor proprii ale matricei P.

Vom dovedi acum că y definit de (4.6.16) satisface condițiile teoremei 4.5.3 pentru :

$$I = [0,1], \qquad z = y(x_0),$$

$$\Omega = B(x_0; \rho), \qquad \bar{\Omega} = B'(x_0; \rho), \qquad \dot{\Omega} = S(x_0; \rho).$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, trebuie dovedit că:

1) y definit de (4.6.16) este continuă în $B'(x_0, \rho)$, ceea ce rezultă ţinînd seama de faptul că R este de clasă $C^{(1)}(B'(x_0; \rho))$ şi că S şi $(1-\tau)P + \tau I$ sînt operatori liniari (continui) de la $E^{(m)}$ la $E^{(m)}$;

2) oricare ar fi $x \in \dot{\Omega} = S(x_0; \rho)$ (deci oricare ar fi x cu $\|x - x_0\| = \rho$) şi $\tau \in [0,1]$, avem $y(x; \tau) \neq y(x_0)$.

Ţinînd însă seama de (4.6.15), (4.6.16) şi (4.6.17) precum şi de faptul că S este ortogonală, avem:

$$\|y(x, \tau) - y(x_0)\| = \|S[((1-\tau)P + \tau I)(x - x_0)] + (1-\tau)R(x)\| \geqslant$$

$$\geqslant \|((1-\tau)P + \tau I)(x - x_0)\| - (1-\tau)\|R(x)\| \geqslant$$

$$\geqslant \|((1-\tau)P + \tau I)(x - x_0)\| - \|R(x)\| \geqslant$$

$$\geqslant (c - \eta(\rho))\|x - x_0\| \tag{4.6.19}$$

Dar $\eta(\rho) \to 0$ cu $\rho \to 0$, deci există $\tilde{\rho} > 0$ astfel încît dacă $\rho \leqslant \tilde{\rho}$, să avem

$$\eta(\rho) < C. \tag{4.6.20}$$

Să remarcăm că începînd cu (4.6.14) şi pînă la (4.6.20) toate relaţiile au fost scrise pentru $x \in B'(x_0; \rho)$ cu $\rho \leqslant \rho_0$. Ca să avem şi (4.6.20), ρ trebuie să satisfacă şi inegalitatea $\rho \leqslant \tilde{\rho}$. Pentru $\rho < \min(\rho_0, \tilde{\rho})$ sînt adevărate toate relaţiile de la (4.6.14) la (4.6.20) inclusiv.

Dar din (4.6.20) şi (4.6.19) rezultă că pentru orice $x \in B'(x_0; \rho)$, $x \neq x_0$ şi pentru orice $\tau \in [0,1]$, avem

$$\|y(x, \tau) - y(x_0)\| > 0. \tag{4.6.21}$$

Aşadar, dacă $x \in S(x_0; \rho) \subset B'(x_0; \rho)$ ($\|x - x_0\| = \rho > 0$ deci, evident. $x \neq x_0$) este adevărată (4.6.21), deci $y(x; \tau) \neq y(x_0)$ oricare ar fi $\tau \in [0,1]$.

Funcţia y definită de (4.6.16) satisfăcînd condiţiile teoremei 4.5.3 urmează după această teoremă că (pentru modul în care sînt definite funcţiile $y_{(\tau)}$ a se vedea de asemenea teorema 4.5.3):

$$d(y_{(0)}, B(x_0; \rho), y(x_0)) = d(y_{(1)}, B(x_0; \rho), y(x_0)). \tag{4.6.22}$$

Dar din (4.6.14), (4.6.15), (4.6.16) obţinem: oricare ar fi $x \in B'(x_0; \rho)$

$$y_{(0)}(x) = y(x, 0) = y(x_0) + SP(x - x_0) + R(x) =$$

$$= y(x_0) + A(x - x_0) + R(x) = y(x);$$

$$y_{(1)}(x) = y(x, 1) = y(x_0) + S(x - x_0),$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că (4.6.22) se scrie :

$$d(y,\ B(x_0;\ \rho),\ y(x_0)) = d(\tilde{y},\ B(x_0;\ \rho),\ y(x_0)), \tag{4.6.23}$$

unde cu $\tilde{y}$ am notat funcţia definită de la $B'(x_0;\ \rho)$ în $E^{(m)}$ după cum urmează :

$$x \in B'(x_0;\ \rho),\ x \xrightarrow{\tilde{y}} \tilde{y}(x) = y(x_0) + S(x - x_0). \tag{4.6.24}$$

Fie funcţia Φ satisfăcînd condiţiile din definiţia 4.4.3 cu $\varepsilon = \rho$. Avem

$$\mathrm{d}(\tilde{y},\ B(x_0;\ \rho),\ y(x_0)) = \mathrm{d}(\tilde{y} - y(x_0),\ B(x_0;\ \rho),\ 0) =$$

$$= \int_{B(x_0;\ \rho)} \Phi(\|\tilde{y}(x) - y(x_0)\|)\, \mathcal{J}(\tilde{y}(x) - y(x_0))\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{B(x_0;\ \rho)} \Phi(\|S(x - x_0)\|)\, \mathcal{J}(S(x - x_0))\, \mathrm{d}x =$$

$$= \det S \int\limits_{\|x - x_0\| < \rho} \Phi(\|x - x_0\|)\, \mathrm{d}x = \det S,$$

ceea ce, ţinînd seama de modul în care este definit S, se mai scrie :

$$\mathrm{d}(\tilde{y},\ B(x_0;\ \rho),\ y(x_0)) = \det S = \frac{\det A}{|\det A|} = \frac{j(x_0)}{|j(x_0)|} = \pm 1. \tag{4.6.25}$$

Din (4.6.25) şi (4.6.23) rezultă

$$\mathrm{d}(y,\ B(x_0;\ \rho),\ y(x_0)) = \pm 1. \tag{4.6.26}$$

Dar din consideraţiile anterioare rezultă :

1) y este de clasă $C^{(1)}$ în $B'(x_0;\ \rho)$;

2) oricare ar fi $x \in B'(x_0;\ \rho)$ $x \neq x_0$, $y(x) \neq y(x_0)$ (aceasta ţinînd seama că pentru orice $x \in B'(x_0;\ \rho)$, $y(x) = y_{(0)}(x) = y(x, 0)$ şi că avem (4.6.21).

Din 1), 2) şi (4.6.26), ţinînd seama de definiţia 4.6.1 a indicelui, rezultă (4.6.11).

Teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 4.6.3. *Fie* $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$. *Presupunem că:*

1° *ecuația* $y(x) = z$, z *fixat în* $E^{(m)}$, *are un număr finit de soluții distincte* $x_1, \ldots, x_N$, *toate aparținînd lui* Ω;

2° *aplicația* y *este de clasă* $C^{(1)}$ *în vecinătatea oricăruia dintre punctele* $x_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant N)$ *și* $j(x_\nu) \neq 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant N$.

Fie N^+ *și* N^- *numărul punctelor mulțimii* $x_1, \ldots, x_N$ *în care* $j(x) > 0$ *(respectiv* < 0*).*

Atunci

$$d(y, \Omega, z) = N^+ - N^-. \tag{4.6.27}$$

Demonstrație. Să observăm că ipoteza 1° permite să aplicăm concluzia teoremei 4.6.1 iar ipoteza 2°, pe cea a teoremei 4.6.2, astfel că avem :

$$d(y, \Omega, z) = \sum_{\nu=1}^{N} i(y\,;\, x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{j(x_\nu)}{|j(x_\nu)|}. \tag{4.6.28}$$

Se poate totdeauna presupune că rădăcinile $x_1, \ldots, x_N$ au fost astfel numerotate încît $j(x_\nu) > 0$ pentru $\nu = 1, 2, \ldots, N^+$ și $j(x_\nu) < 0$ pentru $\nu = N^+ + 1, \ldots, N^+ + N^-$, astfel încît (4.6.28) se scrie

$$d(y, \Omega, z) = \sum_{\nu=1}^{N^+} \frac{j(x_\nu)}{|j(x_\nu)|} + \sum_{\nu=N^++1}^{N^++N^-} \frac{j(x_\nu)}{|j(x_\nu)|} = N^+ - N^-,$$

și teorema este demonstrată.

LEMA 4.6.2. *Fie* $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(1)}(\Omega)$, $y(x) \neq z_0$ *pentru* $x \in \dot{\Omega}$, z_0 *fiind un punct fixat în* $E^{(m)}$. *Atunci, oricărui număr pozitiv* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|y(x) - z_0\|$ *i se poate asocia un punct* $z \in E^{(m)}$ *cu* $\|z - z_0\| \leqslant \varepsilon$, *astfel încît :*

1) *ecuația* $y(x) = z$, $x \in \bar{\Omega}$, *are cel mult un număr finit de soluții* $x_1, \ldots, x_p$, *toate aparținînd lui* Ω;

2) $j(x_\nu) \neq 0$, $\nu = 1, 2, \ldots p$.

Demonstrație. Fie, într-adevăr, $0 < \varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|y(x) - z_0\|$ și fie F mulțimea închisă a tuturor punctelor $x \in \bar{\Omega}$, pentru care $\|y(x) - z\| \leqslant \varepsilon$,

$$F = \{x \,|\, x \in \bar{\Omega},\ \|y(x) - z_0\| \leqslant \varepsilon\}. \tag{4.6.29}$$

Cum pentru orice $x \in \dot{\Omega}$ avem

$$\|y(x) - z_0\| \geqslant \inf_{u \in \dot{\Omega}} \|y(u) - z_0\| > \varepsilon,$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că $F \subset \bar{\Omega}$ (vezi (4.6.29)) nu conține puncte din $\dot{\Omega}$, deci $F \subset \Omega$.

Fie, de asemenea, F_0 submulțimea închisă a punctelor din F în care jacobianul se anulează:

$$F_0 = \{x \mid x \in F \subset \Omega, \quad j(x) = 0\}. \tag{4.6.30}$$

Să observăm mai întîi că mulțimea F_0^*, imaginea lui F_0 prin aplicația y, este de măsură nulă.

Într-adevăr, deoarece $F_0 \subset F \subset \Omega$, avem $F_0^* = y(F_0) \subset y(\Omega)$. Fie φ funcția caracteristică a lui F_0^*:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in F_0^* \\ 0, & \xi \in y(\Omega) - F_0^* \end{cases}$$

Avem, evident:

$$\operatorname{mes} F_0^* = \int_{y(\Omega)} \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{F_0^*} \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_{F_0} \varphi(y(x))\, |\mathcal{J}(x)|\, \mathrm{d}x = \int_{F_0} |j(x)|\, \mathrm{d}x = 0$$

Din faptul că $\operatorname{mes} F_0^* = 0$, rezultă că bula închisă $B'(z_0, \varepsilon) = \{x \mid \|x - z_0\| \leqslant \varepsilon\}$ conține cel puțin un punct z care nu aparține lui F_0^* (În caz contrar am avea $B'(z_0, \varepsilon) \subset F_0^*$, ceea ce contrazice faptul că $\operatorname{mes} F_0^* = 0$). Există așadar un punct $z \in E^{(m)}$ *cu* $\|z - z_0\| \leqslant \varepsilon$, $z \notin F_0^*$.

Acum vom face următoarele observații:

Observația 1. Dacă pentru un asemenea z, există $\xi \in \bar{\Omega}$ astfel încît $y(\xi) = z$, atunci $\xi \in \Omega$ și $j(\xi) \neq 0$.

Fie, într-adevăr, $\xi \in \Omega$ astfel încît

$$z = y(\xi) \notin F_0^* = \{y(x) \mid x \in F_0\} = \{y(x) \mid x \in F,\ j(x) = 0\} =$$

$$= \{y(x) \mid x \in \Omega,\ \|y(x) - z_0\| \leqslant \varepsilon,\ j(x) = 0\}$$

Dar z este astfel încît $\|z - z_0\| \leqslant \varepsilon$, deci $\|y(\xi) - z_0\| \leqslant \varepsilon$ cu $\xi \in \bar{\Omega}$, deci $\xi \in F \subset \Omega$. Așadar $\xi \in F$ dar $y(\xi) \notin F_0^*$ ceea ce, ținînd seama de (4.6.30), atrage că $j(\xi) \neq 0$. Să rezumăm: dat fiind $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|y(x) - z_0\|$,

există un punct $z \in E^{(m)}$ cu proprietăţile :

A) $\|z - z_0 \leqslant \varepsilon$;

B) dacă există $\xi \in \bar{\Omega}$ astfel încît $y(\xi) = z$, atunci

$$\xi \in F \quad \text{şi} \quad j(\xi) \neq 0.$$

Observaţia 2. Pentru un astfel de z, ecuaţia $y(x) = z$, $x \in \bar{\Omega}$, are cel mult un număr finit de soluţii. În caz contrar, mulţimea soluţiilor conţine un şir x_ν convergent la $\xi \in \bar{\Omega}$ ceea ce, ţinînd seama de continuitatea lui y în $\bar{\Omega}$ şi de faptul că $y(x_\nu) = z$, atrage prin trecere la limită cu $\nu \to \infty$ că $y(\xi) = z$, $\xi \in \bar{\Omega}$. Aceasta înseamnă însă (vezi B)) că $\xi \in F$ şi $j(\xi) \neq 0$. Această ultimă concluzie duce însă la contradicţie. Într-adevăr, avem

$$y(x_\nu) - y(\xi) = \frac{\partial y}{\partial x}(\xi + \theta(x_\nu - \xi))(x_\nu - \xi),\ 0 < \theta < 1. \quad (4.6.31)$$

Cu privire la această formulă vom face următoarele remarci :

REMARCA 1. În formula (4.6.31), θ nu este în mod necesar acelaşi pentru toate componentele lui y. Formula (4.6.31) este doar un mod prescurtat de a scrie cele m formule de tipul

$$y_i(x_\nu) - y_i(\xi) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\xi + \theta_i(x_\nu - \xi))(x_\nu^j - \xi^j) \qquad (4.6.31')$$

astfel că în (4.6.31), $\frac{\partial y}{\partial x}$ înseamnă matricea formată cu elementele $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(\xi + \theta_i(x_\nu - \xi))$ deci cu derivatele de forma $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ dar fiecare asemenea derivată calculată, în general, în alt punct, totdeauna situat însă pe segmentul ce uneşte ξ cu x_ν.

REMARCA 2. Formula (4.6.31) poate fi scrisă pentru toţi termenii şirului x_ν cu excepţia unui număr finit de termeni, deşi y este doar continuă la frontieră ($y \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$).

Într-adevăr, am văzut că $x_\nu \to \xi \in \Omega$ care este deschis în $E^{(m)}$ deci există o bulă deschisă $B(\xi; \rho)$ conţinută în Ω. În exteriorul acestei bule deschise se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului x_ν. Toţi ceilalţi termeni fiind în $B(\xi; \rho) \subset \Omega$ şi ţinînd seama că $y \in C^{(1)}(\Omega)$, rezultă că formulele (4.6.31') pot fi scrise pentru toţi aceşti x_ν căci din $x_\nu \in B(\xi; \rho)$ rezultă că $\xi + \theta_i(x_\nu - \xi) \in B(\xi; \rho)$ $(0 < \theta_i < 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama că $y(x_\nu) = y(\xi) = 0$, din (4.6.31') rezultă

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\xi + \theta_i(x_\nu - \xi))(x_\nu^j - \xi^j) = 0, \quad x_\nu - \xi \neq 0$$

ceea ce atrage că determinantul matricei cu elementele $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\xi + \theta_i(x_\nu - \xi))$ este nul:

$$\det \frac{\partial y}{\partial x}(\xi + \theta(x^\nu - \xi)) = 0. \tag{4.6.32}$$

Pe de altă parte, cum $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ sînt funcții continue în $B(\xi; \rho)$, $j(\xi) \neq 0$ iar $\xi + \theta(x_\nu - \xi) \to \xi$ cu $\nu \to \infty$, este clar că pentru ν suficient de mare avem și

$$\det \frac{\partial y}{\partial x}(\xi + \theta(x_\nu - \xi)) \neq 0, \tag{4.6.33}$$

ceea ce contrazice (4.6.32) și deci, ecuația $y(x) = z$ $(x \in \bar{\Omega})$ poate avea cel mult un număr finit de soluții $x_1, \cdots, x_p$, care după B) sînt din $F \subset \Omega$ și $j(x_\nu) \neq 0$, $\nu = 1, \ldots, p$.

Lema este demonstrată.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm în toată generalitatea că gradul lui Brouwer $d(y, \Omega, z)$ (pentru $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$, z fixat în $E^{(m)}$, $y(x) \neq z$ pentru $x \in \dot{\Omega}$) este un întreg. Atragem atenția că teorema 4.6.3 furnizează același rezultat în condiții mult mai restrictive (a se vedea formula (4.6.27))

TEOREMA 4.6.3 *Fie* $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$, $y(x) \neq z_0$ *pentru* $x \in \dot{\Omega}$ *cu* z_0 *fixat în* $E^{(m)}$. *Atunci gradul lui Brouwer* $d(y, \Omega, z_0)$ *este un întreg.*

Demonstrație. După definiția 4.4.4,

$$d(y, \Omega, z_0) = \lim_{p \to \infty} d(y_p, \Omega, z_0), \tag{4.6.34}$$

unde y_p este un șir de funcții de clasă $C^{(1)}(E^{(m)})$ cu proprietatea $y_p(x) \to y(x)$ uniform cu $x \in \bar{\Omega}$, $y_p(x) \neq z_0$, pentru $x \in \dot{\Omega}$ și $p > p_0$ (existența unui asemenea rang p_0 a fost menționată cu ocazia unor teoreme anterioare).

Din (4.6.34) rezultă că este suficient să demonstrăm că $d(y_p, \Omega, z)$ este un întreg pentru $p > p_0$. Dar aplicînd lema 4.6.2 pentru fiecare din funcțiile y_p cu $p > p_0$, obținem: pentru $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ există $z_k^{(p)}$ cu $\|z_k^{(p)} -$

$-z_0\| \leqslant \frac{1}{k}$ şi astfel încît ecuaţia $y_p(x) = z_k^{(p)}$, $x \in \overline{\Omega}$, are un număr finit de soluţii $x_1^{(p),k}, \ldots, x_\nu^{(p),k}$ toate aparţinînd lui Ω, de unde, în conformitate cu teorema 4.6.1, urmează că

$$d(y_p,\ \Omega,\ z_k^{(p)}) = \sum_{i=1}^{\nu} i\,(y_p;\ x_i^{(p),k}) = \text{întreg}. \tag{4.6.36}$$

Dar pentru funcţii de clasă $C^{(1)}(\Omega)$ cum este cazul funcţiilor y_p, $p > p_0$, din formula

$$d(y, \Omega, z) = \int_\Omega \Phi(\|y(x) - z\|)\,\mathcal{J}(y(x))\,\mathrm{d}x$$

urmează continuitatea lui $d(y, \Omega, z)$ cu z şi cum din (4.6.35) urmează că $z_k^{(p)} \to z_0$ cu $k \to \infty$, avem $d(y_p, \Omega, z_k^{(p)}) \to d(y_p, \Omega, z_0)$ şi deci $d(y_p, \Omega, z_0)$ este un întreg oricare ar fi $p > p_0$. Acest rezultat asociat formulei (4.6.34) arată că $d(y, \Omega, z_0)$ este un întreg şi teorema este demonstrată.

LEMA 4.6.3 (Leray-Schauder). *Fie Ω o mulţime deschisă şi mărginită conţinută în $E^{(m+p)}$, spaţiu vectorial real de dimensiune $m + p$. Fie $E^{(m)}$ un subspaţiu de dimensiune m al lui $E^{(m+p)}$ şi z un element fixat în $E^{(m)}$. Vom nota cu $\widetilde{\Omega} = \Omega \cap E^{(m)}$ (deschis şi mărginit în $E^{(m)}$) şi fie $y : \overline{\Omega} \to E^{(m+p)}$ $y(x) \in C^{(0)}(\overline{\Omega})$, $y(x) - z \neq 0$ pentru $x \in \dot{\Omega}$ şi astfel încît $y(x) - x \in E^{(m)}$ oricare ar fi $x \in \overline{\Omega}$ (orice punct din $\overline{\Omega}$ este supus prin y unei deplasări paralele cu subspaţiul $E^{(m)}$). În aceste condiţii, restricţia lui y la $\overline{\widetilde{\Omega}} = \overline{\Omega} \cap E^{(m)}$, fie ea $\widetilde{y}$, poate fi considerată ca o aplicaţie continuă de la $\overline{\widetilde{\Omega}}$ în $E^{(m)}$ şi $\widetilde{y}(x) - z \neq 0$ pentru $x \in \dot{\widetilde{\Omega}} = \dot{\Omega} \cap E^{(m)}$.*

Lema afirmă că

$$d(y, \Omega, z) = d(\widetilde{y}, \widetilde{\Omega}, z). \tag{4.6.37}$$

Demonstraţie. Vom începe prin a observa că, într-adevăr, restricţia lui y la $\overline{\widetilde{\Omega}}$ poate fi considerată o aplicaţie de la $\overline{\widetilde{\Omega}}$ în $E^{(m)}$. Fie $x \in \overline{\widetilde{\Omega}} = \overline{\Omega} \cap E^{(m)}$. Vom dovedi că $\widetilde{y}(x) \in E^{(m)}$. Dar $\widetilde{y}(x) = y(x)$ şi ţinînd seama de ipotezele lemei, avem

$$\widetilde{y}(x) - x = y(x) - x \in E^{(m)} \tag{4.6.38}$$

Pe de altă parte, din $x \in \overline{\widetilde{\Omega}} = \overline{\Omega} \cap E^{(m)}$, rezultă că

$$x \in E^{(m)}. \tag{4.6.39}$$

Din (4.6.38) şi (4.6.39) rezultă că $\widetilde{y}(x) \in E^{(m)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Revenind la demonstrația propriu-zisă, este suficient să demonstrăm lema pentru $p = 1$ (analiza demonstrației făcută pentru cazul $p = 1$ va dovedi acest lucru), așadar fie $E^{(m)}$ spațiul vectorial al punctelor $x = (x_1, \cdots, x_m)$ și subspațiul $E^{(m-1)}$ care poate fi presupus totdeauna a fi subspațiul punctelor ce au prima coordonată nulă: $x_1 = 0$. Fie y o aplicație continuă de la aderența $\bar{\Omega}$ a unui deschis mărginit $\Omega \subset E^{(m)}$ în $E^{(m)}$ astfel că pentru orice $x \in \bar{\Omega}$, $y(x) - x \in E^{(m-1)}$. Dacă $y(x) = (y_1(x), \cdots, y_m(x))$, condiția $y(x) - x \in E^{(m-1)}$ înseamnă că $y_1(x) - x_1 = 0$, deci că $y_1(x) = x_1$. Ținînd seama de definiția 4.4.4 a gradului lui Brouwer pentru funcții continue, va fi suficient să demonstrăm lema în ipoteza $y \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$. Fie z_0 fixat în $E^{(m-1)}$ și $y(x) - z_0 \neq 0$ pentru $x \in \dot{\Omega}$. Fie $\tilde{y}$ restricția lui y la $\bar{\tilde{\Omega}} = \bar{\Omega} \cap E^{(m-1)}$. Aplicația $\tilde{y}$ poate fi considerată ca o aplicație de la $\bar{\tilde{\Omega}}$ în $E^{(m-1)}$ (vezi observația cu care am început demonstrația) de clasă $C^{(1)}(\tilde{\Omega}) \cap C^{(0)}(\bar{\tilde{\Omega}})$. Evident, $\dot{\tilde{\Omega}} = \dot{\Omega} \cap E^{(m-1)}$, așadar oricare ar fi $x \in \dot{\tilde{\Omega}}$, rezultă că $x \in \dot{\Omega}$ și deci avem $\tilde{y}(x) \neq z_0$. Fie $0 < \varepsilon < \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|y(x) - z_0\|$.

Cum $\dot{\tilde{\Omega}} \subset \dot{\Omega}$, cu atît mai mult avem

$$\varepsilon < \inf_{x \in \dot{\tilde{\Omega}}} \|y(x) - z_0\| = \inf_{x \in \dot{\tilde{\Omega}}} \|\tilde{y}(x) - z_0\|. \tag{4.6.40}$$

Funcția $\tilde{y} : \bar{\tilde{\Omega}} \to E^{(m-1)}$ satisface condițiile teoremei 4.6.2. În consecință, oricărui $\varepsilon > 0$ pentru care este satisfăcută (4.6.40) îi corespunde $z \in E^{(m-1)}$, cu $\|z - z_0\| < \varepsilon$ astfel încît ecuația $\tilde{y}(x) = z$, $x \in \bar{\tilde{\Omega}}$, are cel mult un număr finit de soluții $x_1, \ldots, x_p$ toate aparținînd lui $\tilde{\Omega}$ și astfel încît $\tilde{j}(x_\nu) \neq 0$, $\nu = 1, \ldots, p$, $\tilde{j}(x)$ însemnînd jacobianul aplicației $\tilde{y}$ în punctul x. Să observăm însă că ecuația $y(x) = z$, $x \in \bar{\Omega}$, are aceleași soluții cu ecuația $\tilde{y}(x) = z$ în $\bar{\tilde{\Omega}}$. Într-adevăr, este clar că orice soluție a ecuației $\tilde{y}(x) = z$, $x \in \bar{\tilde{\Omega}}$, este și soluție a ecuației $y(x) = z$, $x \in \bar{\Omega}$. Să dovedim și reciproc. Fie $x \in \bar{\Omega}$ astfel încît $y(x) = z \in E^{(m-1)}$ care comparată cu $y(x) - x \in E^{(m-1)}$ (vezi ipoteza) arată că $x \in E^{(m-1)}$, deci $x \in \bar{\Omega} \cap E^{(m-1)} = \bar{\tilde{\Omega}}$. Dar dacă $x \in \bar{\tilde{\Omega}}$, faptul că $y(x) = z$, se scrie $\tilde{y}(x) = z$ (căci restricția lui y la $\bar{\tilde{\Omega}}$ este $\tilde{y}$) care arată că x este soluție a ecuației $\tilde{y}(x) = z$. Pe de altă parte, este clar că $j(x_\nu) = \tilde{j}(x_\nu) \neq 0$, $\nu = 1, \ldots, p$. Așadar, $y : \bar{\Omega} \to E^{(m)}$, $y \in C^{(1)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega})$, $y(x) \neq z_0$, $x \in \dot{\Omega}$ are proprietatea următoare: există o mulțime deschisă $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ care conține mulțimea soluțiilor ecuației $y(x) = z$, $x \in \bar{\Omega}$. În conformitate cu lema 4.6.1 urmează că:

$$d(y, \Omega, z) = d(y, \tilde{\Omega}, z) = d(\tilde{y}, \tilde{\Omega}, z). \tag{4.6.41}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.6.41), ţinînd seama că z este astfel încît $\|z - z_0\| < \varepsilon$ şi utilizînd continuitatea gradului lui Brouwer cu z, rezultă

$$d(y, \Omega, z_0) = d(\tilde{y}, \tilde{\Omega}, z_0). \tag{4.6.42}$$

Lema este demonstrată.

§ 4.7. Cîteva rezultate din teoria Leray-Schauder a ecuaţiilor funcţionale [56]

Fie B un spaţiu Banach real.

DEFINIŢIA 4.7.1. Mulţimea $C \subset B$ se zice *relativ compactă* dacă din orice şir de elemente din C se poate extrage un subşir convergent (la un element din B).

Din definiţia 4.7.1 rezultă imediat că dacă C este relativ compactă în B, atunci C este total mărginită, adică oricărui $\varepsilon > 0$ i se poate asocia un sistem finit de elemente, $\eta_1, \cdots, \eta_p$, din C, astfel încît pentru orice $x \in C$, există cel puţin un indice i, $1 \leqslant i \leqslant p$, astfel încît $\|x - \eta_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Fie, într-adevăr, η_1 un element oarecare din C şi $\eta_2 \in C$ astfel încît $\|\eta_2 - \eta_1\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$; fie apoi $\eta_3 \in C$ astfel încît $\|\eta_3 - \eta_1\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ şi $\|\eta_3 - \eta_2\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ş.a.m.d. fie η_p astfel încît $\|\eta_p - \eta_i\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $i = 1, \ldots, p-1$. Această construcţie trebuie să se oprească la un p finit. În caz contrar, ar exista un şir η_n de elemente ale lui C, astfel încît pentru orice m, n naturali, $m \neq n$, să avem $\|\eta_m - \eta_n\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ şi deci din acest şir nu s-ar putea extrage nici un subşir convergent, ceea ce contrazice faptul că C este relativ compactă în B. Construcţia se opreşte aşadar la un p finit, de unde urmează că pentru orice $x \in C$, există cel puţin un indice i, $1 \leqslant i \leqslant p$, astfel încît $\|x - \eta_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

TEOREMA 4.7.1. *Dacă $C \subset B$ este relativ compactă, atunci oricărui $\varepsilon > 0$ i se poate asocia o aplicaţie continuă T_ε de la C la un subspaţiu finit dimensional $E^{(m_\varepsilon)}$ al lui B astfel încît pentru orice $x \in C$,*

$$\|T_\varepsilon x - x\| < \varepsilon. \tag{4.7.1}$$

Demonstraţie. Mulţimea C fiind relativ compactă, lui $\varepsilon > 0$ i se poate asocia un sistem finit $\eta_1, \cdots, \eta_p$ (p depinzînd de ε) de elemente din C astfel încît, pentru orice $x \in C$, există măcar un i astfel încît $\|x - \eta_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subspațiul $E^{(m_\varepsilon)}$ din teorema 4.7.1 este acoperirea liniară a sistemului $\eta_1, \cdots, \eta_p$ (cum, în general, $\eta_1, \cdots, \eta_p$ nu sînt liniar independenți, $m_\varepsilon = \dim E^{(m_\varepsilon)} \leqslant p$), iar T_ε este definit astfel

$$x \in C,\ x \xrightarrow{T_\varepsilon} T_\varepsilon(x) = \left[\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\, \eta_i, \tag{4.7.2}$$

unde

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - \eta_i\| & \text{dacă } \|x - \eta_i\| < \varepsilon \\ 0 & \text{dacă } \|x - \eta_i\| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{4.7.3}$$

Din (4.7.3) urmează că oricare ar fi $x \in C$, $\mu_i(x) \geqslant 0$ pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Cum însă pentru orice $x \in C$ există cel puțin un indice, fie el i_0, astfel $\|x - \eta_{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ rezultă din (4.7.3) că $\mu_{i_0}(x) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$, deci că $\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x) > 0$, așadar, $\left[\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\right]^{-1}$ din (4.7.2) are sens oricare ar fi $x \in C$. Vom verifica direct că T_ε definit de (4.7.2) satisface condițiile teoremei 4.7.1.

Continuitatea lui T_ε pe C este evidentă.

În ceea ce privește (4.7.1), să observăm că:

$$T_\varepsilon x - x = \left[\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\eta_i - \left[\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\right] x =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\,(\eta_i - x)$$

astfel că

$$\|T_\varepsilon x - x\| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x) \|\eta_i - x\| \tag{4.7.4}$$

Dar, $\mu_i(x)$ sînt egali cu zero dacă $\|x - \eta_i\| \geqslant \varepsilon$. De aceea, în sumele din (4.7.4) putem reține numai termenii, fie ei cu indicii $i_1, \cdots, i_k$, pentru care $\mu_{i_l}(x) > 0$, $l = 1, \ldots, k$, adică (ținînd seama de (4.7.3)) pentru care $\|x - \eta_{i_l}\| < \varepsilon$, $l = 1, \ldots, k$, astfel că (4.7.4) se scrie

$$\|T_\varepsilon x - x\| = \left[\sum_{l=1}^{k} \mu_{i_l}(x)\right]^{-1} \sum_{l=1}^{k} \mu_{i_l}(x) \|\eta_{i_l} - x\| < \left[\sum_{l=1}^{k} \mu_{i_l}(x)\right]^{-1} \sum_{l=1}^{k} \mu_{i_l}(x) \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Fie $\bar{\Omega}$ aderența unui deschis și mărginit $\Omega \subset B$, de frontieră $\dot{\Omega}$.

DEFINIȚIA 4.7.2. O aplicație $\mathcal{F} : \bar{\Omega} \to B$ se zice complet continuă dacă:

Scanned with OKEN Scanner

1) $\mathcal{F}$ este continuă (în sensul topologiei tari din B);

2) $\mathcal{F}(\bar{\Omega})$ este relativ compactă în B.

LEMA 4.7.1. *Fie $\mathcal{F}$ o aplicație complet continuă a lui $\bar{\Omega}$ în B. Atunci, oricărui $\varepsilon > 0$ i se poate asocia o aplicație continuă $\mathcal{F}_\varepsilon$ de la $\bar{\Omega}$ la un subspațiu finit dimensional $E^{(m_\varepsilon)}$ al lui B astfel încît, pentru orice $x \in \bar{\Omega}$, avem*

$$\| \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_\varepsilon(x) \| < \varepsilon. \tag{4.7.5}$$

Demonstrație. Fie $C = \mathcal{F}(\bar{\Omega})$. Cum $\mathcal{F}$ este complet continuă, C este relativ compactă în B și deci oricărui $\varepsilon > 0$ i se poate asocia după teorema 4.7.1 o aplicație continuă $T_\varepsilon : C \to E^{(m_\varepsilon)}$ astfel încît

$$\| T_\varepsilon y - y \| < \varepsilon$$

oricare ar fi $y \in C$.

Aplicația $\mathcal{F}_\varepsilon$ care satisface condițiile lemei este $\mathcal{F}_\varepsilon = T_\varepsilon \circ \mathcal{F}$.

Evident, $\mathcal{F}_\varepsilon$ este continuă.

Fie $x \in \bar{\Omega}$. Atunci $y = \mathcal{F}(x) \in C$ și deci

$$\| T_\varepsilon y - y \| = \| T_\varepsilon(\mathcal{F}(x)) - \mathcal{F}(x) \| = \| \mathcal{F}_\varepsilon(x) - \mathcal{F}(x) \| < \varepsilon.$$

Lema este demonstrată.

Vom trece acum la definirea gradului topologic pentru anumite aplicații funcționale. Cadrul în care va fi pusă această definiție este următorul : $\bar{\Omega}$ este aderența în B a unei mulțimi deschise și mărginite Ω de frontieră $\dot{\Omega}$.

Fie $\mathcal{F} : \bar{\Omega} \to B$ o aplicație complet continuă. Fie $\Phi : \bar{\Omega} \to B$, $\Phi \in C^{(0)}(\bar{\Omega})$, astfel :

$$x \in \bar{\Omega},\ x \xrightarrow{\Phi} \Phi(x) = x - \mathcal{F}(x). \tag{4.7.6}$$

Vom defini $d(\Phi, \Omega, 0)$ în următoarele condiții :

a) $\Phi(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \dot{\Omega}$.

Există atunci $h > 0$ astfel încît $\| \Phi(x) \| > h > 0$ oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}$. Într-adevăr, în caz contrar, oricare ar fi $h > 0$, există $x \in \dot{\Omega}$ astfel încît $\| \Phi(x) \| < h$. În particular, pentru $h_n = \dfrac{1}{n}$ există $x_n \in \dot{\Omega}$ astfel încît

$$\| \Phi(x_n) \| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{4.7.7}$$

Din (4.7.7) rezultă că

$$\Phi(x_n) = x_n - \mathcal{F}(x_n) \to 0,\ n \to \infty. \tag{4.7.8}$$

Dar $\mathcal{F}(x_n) \in \mathcal{F}(\bar{\Omega})$ care este o mulțime relativ compactă în B, deci din $\mathcal{F}(x_n)$ se poate extrage un subșir

$$\mathcal{F}(x_{n_k}) \to x_0,\ k \to \infty\,. \tag{4.7.9}$$

Din (4.7.8) și (4.7.9) rezultă

$$x_{n_k} \to x_0 \in \dot{\Omega},\ k \to \infty \tag{4.7.10}$$

căci x_{n_k} este un șir de puncte din $\dot{\Omega}$ care este închisă. Din (4.7.10), utilizînd continuitatea lui Φ, rezultă

$$\Phi(x_{n_k}) \to \Phi(x_0),\ k \to \infty\,. \tag{4.7.11}$$

Pe de altă parte, din (4.7.8) rezultă

$$\Phi(x_{n_k}) \to 0, \quad k \to \infty \tag{4.7.12}$$

Din (4.7.11) și (4.7.12) urmează că $\Phi(x_0) = 0$ cu $x_0 \in \dot{\Omega}$ ceea ce contrazice ipoteza $\Phi(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \dot{\Omega}$.

Așadar, există $h > 0$ astfel încît

$$\|\Phi(x)\| > h > 0, \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{4.7.13}$$

După lema 4.7.1, pentru $\varepsilon = \dfrac{h}{2} > 0$ există o aplicație continuă $\mathcal{F}_h$ a lui $\bar{\Omega}$ într-un subspațiu finit dimensional $E^{(m_h)}$ al lui B astfel încît

$$\|\mathcal{F}_h(x) - \mathcal{F}(x)\| < \frac{h}{2},\ x \in \bar{\Omega}. \tag{4.7.14}$$

Fie $E^{(n_h)}$ un subspațiu finit dimensional de dimensiune n_h al lui B care conține pe $E^{(m_h)}$ și astfel încît intersecția $\Omega_{n_h} = E^{(n_h)} \cap \Omega$ este nevidă.

Evident, Ω_{n_h} este o mulțime deschisă și mărginită în $E^{(n_h)}$ a cărei frontieră este $\dot{\Omega}_{n_h} = \dot{\Omega} \cap E^{(n_h)} \subset \dot{\Omega}$ și deci, ținînd seama de (4.7.13), pentru orice $x \in \dot{\Omega}_{n_h}$, $\|\Phi(x)\| > h > 0$.

Fie $\Phi_h : \overline{\Omega}_{n_h} \to E^{(n_h)}$ astfel

$$x \in \overline{\Omega}_{n_h}, \; x \overset{\Phi_h}{\to} \Phi_h(x) = x - \mathcal{F}_h(x) \tag{4.7.15}$$

Aplicaţia Φ_h îndeplineşte condiţiile necesare pentru a putea defini gradul lui Brouwer $d(\Phi_h, \Omega_{n_h}, 0)$.

Într-adevăr, Φ_h definită de (4.7.15) este o aplicaţie continuă a aderenţei unui deschis mărginit $\Omega_{n_h} \subset E^{(n_h)}$ în $E^{(n_h)}$ căci :

$$x \in \overline{\Omega}_{n_h} = \overline{\Omega} \cap E^{(n_h)} \Rightarrow x \in E^{n_h}, \; \mathcal{F}_h(x) \in E^{(m_h)} \subset E^{(n_h)}. \tag{4.7.16}$$

Din (4.7.16) rezultă că pentru orice $x \in \overline{\Omega}_{n_h}$,

$$\Phi_h(x) = x - \mathcal{F}_h(x) \in E^{(n_h)} \tag{4.7.17}$$

Ca aplicaţie de la $\overline{\Omega}_{n_h}$ în $E^{(n_h)}$, Φ_h are următoarele proprietăţi :

A) Φ_h este continuă ;

B) oricare ar fi $x \in \overline{\Omega}_{n_h} \subset \overline{\Omega}$, ţinînd seama de (4.7.14), rezultă

$$\|\Phi_h(x) - \Phi(x)\| = \|\mathcal{F}_h(x) - \mathcal{F}(x)\| < \frac{h}{2}; \tag{4.7.18}$$

C) din (4.7.18), ţinînd seama că $\|\Phi(x)\| > h > 0$, $x \in \dot{\Omega}_{n_h}$, rezultă,

$$\big|\, \|\Phi_h(x)\| - \|\Phi(x)\| \,\big| < \frac{h}{2} \Rightarrow \|\Phi_h(x)\| > \|\Phi(x)\| - \frac{h}{2} > \frac{h}{2} > 0, \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{4.7.19}$$

Din A) şi C) rezultă că are sens $d(\Phi_h, \Omega_{n_h}, 0)$.

Vom pune prin definiţie

$$d(\Phi, \Omega, 0) = d(\Phi_h, \Omega_{n_h}, 0). \tag{4.7.20}$$

Pentru ca definiţia să fie corectă, trebuie să demonstrăm că este independentă de h (deci de funcţia Φ_h) şi de subspaţiul finit dimensional $E^{(n_h)}$ care conţine pe $E^{(m_h)}$.

Fie $h^* > 0$. Vom presupune $0 < h^* < h$ (analiza demonstraţiei va arăta că aceasta nu micşorează generalitatea). O construcţie analoagă cu cea corespunzătoare lui h conduce la următoarele rezultate :

— există o aplicaţie continuă $\mathcal{F}_{h^*}$ a lui $\overline{\Omega}$ într-un subspaţiu finit dimensional $E^{(m_{h^*})}$ al lui B ;

— dacă $E^{(n_{h^*})}$ este un subspațiu finit dimensional al lui B care conține $E^{(m_{h^*})}$ și astfel încît intersecția $\Omega_{n_{h^*}} = \Omega \cap E^{(n_{h^*})}$ este nevidă, atunci $\Phi_{h^*} : \overline{\Omega}_{n_{h^*}} \to E^{(n_{h^*})}$ prin

$$x \in \overline{\Omega}_{n_{h^*}},\ x \xrightarrow{\Phi_{h^*}} x - \mathcal{F}_{h^*}(x)$$

are următoarele proprietăți :

D) Φ_{h^*} este continuă ;

E) $\|\Phi_{h^*}(x)\| > \dfrac{h^*}{2} > 0$ oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}_{n_{h^*}}$; (4.7.21)

F) $\|\Phi_{h^*}(x) - \Phi_h(x)\| < \dfrac{h}{2}$ (4.7.22)

oricare ar fi $x \in \overline{\Omega}_{n_{h^*}}$.

Din D) și E) rezultă că are sens $d(\Phi_{h^*}, \Omega_{n_{h^*}}, 0)$.

Pentru ca definiția pusă pentru $d(\Phi, \Omega, 0)$ să fie corectă, va trebui să dovedim că

$$d(\Phi_h, \Omega_{n_h}, 0) = d(\Phi_{h^*}, \Omega_{n_{h^*}}, 0). \tag{4.7.23}$$

Vom începe cu un caz particular : cel în care subspațiile finit dimensionale $E^{(n_h)}$ și $E^{(n_{h^*})}$ sînt confundate într-unul singur, $E^{(l)}$.

În acest caz, însă,

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{n_h} &= E^{(n_h)} \cap \Omega = E^{(l)} \cap \Omega = \Omega_l ; \quad \dot{\Omega}_{n_h} = \dot{\Omega} \cap E^{(l)} \subset \dot{\Omega} \\ \Omega_{n_{h^*}} &= E^{(n_{h^*})} \cap \Omega = E^{(l)} \cap \Omega = \Omega_l ; \quad \dot{\Omega}_{n_{h^*}} = \dot{\Omega} \cap E^{(l)} \subset \dot{\Omega} \end{aligned}\right\} \tag{4.7.24}$$

deci funcțiile Φ_h și Φ_{h^*} pot fi considerate definite de la $\overline{\Omega}_l$ în $E^{(l)}$, căci $\Phi_h(x) = x - \mathcal{F}_h(x)$ cu $x \in \Omega_l \subset E^{(l)}$, $\mathcal{F}_h(x) \in E^{(m_h)} \subset E^{(n_h)} = E^{(l)}$ și analog pentru Φ_{h^*}.

În acest caz, a dovedi (4.7.23) revine la a dovedi că

$$d(\Phi_h, \Omega_l, 0) = d(\Phi_{h^*}, \Omega_l, 0). \tag{4.7.25}$$

Fie $y : \overline{\Omega}_l \times [0,1] \to E^{(l)}$ după cum urmează :

$$(x, \tau) \in \overline{\Omega}_l \times [0,1],\ (x, \tau) \xrightarrow{y} y(x, \tau) = \tau\Phi_h(x) + (1 - \tau)\Phi_{h^*}(x). \tag{4.7.26}$$

Vom dovedi că funcţia y definită de (4.7.26) îndeplineşte condiţiile teoremei 4.5.3 pentru $E^{(m)} = E^l$, $\Omega = \Omega_l$, $I = [0, 1]$, $z = 0$. Aceasta înseamnă să dovedim că y este continuă şi că $y(x, \tau) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}_l$ şi $\tau \in [0, 1]$. Într-adevăr, pentru orice $x \in \dot{\Omega}_l$ şi $\tau \in [0, 1]$, avem

$$\|y(x, \tau)\| = \|\tau\Phi_h(x) + (1 - \tau)\,\Phi_{h*}(x)\| > \frac{h}{2}. \tag{4.7.27}$$

Pentru a demonstra (4.7.27) vom începe prin a dovedi că pentru orice $x \in \bar{\Omega}_l$ şi orice $\tau \in [0,1]$, avem

$$\|(\tau\Phi_h(x) + (1 - \tau)\,\Phi_{h*}(x)) - \Phi(x)\| < \frac{h}{2}. \tag{4.7.28}$$

Într-adevăr, ţinînd seama de (4.7.18) şi (4.7.22), rezultă

$$\|(\tau\Phi_h(x) + (1 - \tau)\,\Phi_{h*}(x)) - \Phi(x)\| = \|\tau(\Phi_h(x) - \Phi(x)) +$$

$$+ (1 - \tau)\,(\Phi_{h*}(x) - \Phi(x))\| \leqslant \tau\|\Phi_h(x) - \Phi(x)\| +$$

$$+(1-\tau)\,\|\Phi_{h*}(x)-\Phi(x)\| < \tau\frac{h}{2} + (1-\tau)\frac{h^*}{2} \leqslant \max\left(\frac{h}{2}, \frac{h^*}{2}\right) = \frac{h}{2},$$

(aici intervenind alegerea pe care am făcut-o, $h^* < h$).

Din (4.7.28) urmează

$$|\,\|\tau\Phi_h(x) + (1 - \tau)\,\Phi_{h*}(x)\| - \|\Phi(x)\|\,| \leqslant$$

$$\leqslant \|(\tau\Phi_h(x)+ (1-\tau)\,\Phi_{h*}(x)) - \Phi(x)\| < \frac{h}{2}$$

sau

$$-\frac{h}{2} < \|\tau\Phi_h(x) + (1 - \tau)\,\Phi_{h*}(x)\| - \|\Phi(x)\| < \frac{h}{2}$$

din care rezultă

$$\|\tau\Phi_h(x) + (1 - \tau)\,\Phi_{h*}(x)\| > \|\Phi(x)\| - \frac{h}{2}. \tag{4.7.29}$$

Fie $x \in \dot{\Omega}_l \subset \dot{\Omega}$. Atunci din (4.7.13) şi (4.7.29) rezultă (4.7.27). Funcţia y definită de (4.7.26) satisfăcînd condiţiile teoremei 4.5.3 pentru $E^{(m)}$, Ω, I şi z pe care le-am indicat, urmează că:

$$d(y_{(1)},\ \Omega_l,\ 0) = d(y_{(0)},\ \Omega_l,\ 0)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, ținînd seama de (4.7.26) și de faptul că $y_{(\tau)}(x) = y(x, \tau)$,

$$d(\Phi_h, \Omega_l, 0) = d(\Phi_{h^*}, \Omega_l, 0)$$

adică tocmai (4.7.25).

Vom trece acum la a demonstra (4.7.23) în cazul general, $E^{(n_h)} \neq E^{(n_{h^*})}$. În acest caz, (4.7.23) va fi o consecință a lemei Leray-Schauder.

Fie $E^{(l)}$ un subspațiu finit dimensional al lui B astfel încît $E^{(l)} \supset E^{(n_h)}$, $E^{(l)} \supset E^{(n_{h^*})}$. Repetînd construcția corespunzătoare cazului particular analizat mai sus, se obține

$$d(\Phi_h, \Omega_l, 0) = d(\Phi_{h^*}, \Omega_l, 0) \tag{4.7.30}$$

Cu ajutorul lemei Leray-Schauder (lema 4.6.3) vom demonstra că

$$d(\Phi_h, \Omega_l, 0) = d(\Phi_h, \Omega_{n_h}, 0) \tag{4.7.31}$$

și analog

$$d(\Phi_{h^*}, \Omega_l, 0) = d(\Phi_{h^*}, \Omega_{n_{h^*}}, 0) \tag{4.7.32}$$

Din (4.7.30), (4.7.31), (4.7.32) rezultă, evident, (4.7.23). Egalitatea (4.7.31) rezultă din lema Leray-Schauder alegînd (în stînga sînt datele lemei 4.6.3 așa cum a fost enunțată inițial, în dreapta, cu ce trebuie înlocuite pentru ca (4.7.31) să fie o consecință a lemei 4.6.3):

$E^{(m+p)} \Rightarrow E^{(l)}$;

$\Omega \quad \Rightarrow \Omega_l (= \Omega \cap E^{(l)})$;

$E^{(m)} \quad \Rightarrow E^{(n_h)}$;

$z \quad \Rightarrow 0 \in E^{(n_h)}$;

$\widetilde{\Omega} (= \Omega \cap E^{(m)}) \Rightarrow \Omega_{n_h} (= \Omega \cap E^{(n_h)} = \Omega \cap (E^{(l)} \cap E^{(n_h)}) = \Omega_l \cap E^{(n_h)})$;

$y : \overline{\Omega} \to E^{(m+p)}$, $y \in C^{(0)}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \Phi_h : \overline{\Omega}_l \to E^{(l)}$, $\Phi_h \in C^{(0)}(\overline{\Omega}_l)$;

$\widetilde{y} = y_{/\overline{\widetilde{\Omega}}} : \overline{\widetilde{\Omega}} \to E^{(m)}$, $\widetilde{y} \in C^{(0)}(\overline{\widetilde{\Omega}}) \Rightarrow \Phi_{h/\overline{\Omega}_{n_h}} : \overline{\Omega}_{n_h} \to E^{(n_h)}$, $\Phi_{h/\overline{\Omega}_{n_h}} \in C^{(0)}(\overline{\Omega}_{n_h})$;

Vom dovedi că cu această alegere, condițiile lemei Leray-Schauder sînt satisfăcute. Într-adevăr, condiția $y(x) - z \neq 0$ pentru orice $x \in \dot{\Omega}$ revine la $\Phi_h(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \dot{\Omega}_l$ ceea ce este evident, deoarece $\| \Phi_h(x) \| >$

$> \frac{h}{2} > 0$ oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}_l$, în timp ce condiţia $y(x) - x \in E^{(m)}$ oricare ar fi $x \in \overline{\Omega}$ revine la $\Phi_h(x) - x \in E^{(n_h)}$ oricare ar fi $x \in \overline{\Omega}_l$, ceea ce este iarăşi evident căci $\Phi_h(x) - x = -\mathcal{F}_h(x) \in E^{(m_h)} \subset E^{(n_h)}$.

Condiţiile lemei Leray-Schauder fiind îndeplinite, urmează că

$$d(\Phi_h, \Omega_l, 0) \,(= d(y, \Omega, 0) = d(\Phi_h, \Omega_{n_h}, 0) \,(= d(\widetilde{y}, \widetilde{\Omega}, 0),$$

adică tocmai (4.7.31). Demonstraţie analoagă pentru (4.7.32). Corectitudinea definiţiei a fost demonstrată.

Pornind de la definiţia pe care am pus-o pentru $d(\Phi, \Omega, 0)$, este uşor de demonstrat că pentru $d(\Phi, \Omega, 0)$ sînt adevărate proprietăţile furnizate de teoremele 4.5.1, 4.5.2 şi 4.5.3, precum şi consecinţele lor, inclusiv teorema lui Brouwer.

Vom da acum o aplicaţie a teoriei gradului în obţinerea unor teoreme de existenţă pentru un anumit tip de ecuaţii funcţionale. Fie ecuaţia

$$x - \mathcal{F}(x, \tau) = 0 \tag{4.7.34}$$

considerată în ipotezele următoare:

1) B este un spaţiu Banach real, I un segment închis al dreptei reale, $B \times I$ mulţimea produs cu elementul generic de forma (x, τ), $x \in B$, $\tau \in I$. Vom defini distanţa între două elemente (x, τ) şi (x', τ') din $B \times I$, prin

$$\rho((x, \tau), (x', \tau')) = \|x - x'\| + |\tau - \tau'| \tag{4.7.35}$$

din (7.4.35) deducîndu-se şi topologia utilizată pe $B \times I$.

2) $\overline{G}$ este aderenţa în $B \times I$ a unei mulţimi mărginite şi deschise $G \subset B \times I$;

3) $\mathcal{F}$ este o aplicaţie complet continuă a lui G în B;

4) $\mathcal{F}$ este uniform continuă cu τ: oricărui $\varepsilon > 0$ i se poate asocia $\delta(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi (x, τ) şi (x', τ') din $\overline{G}$ cu $|\tau - \tau'| \leqslant \delta(\varepsilon)$, avem

$$\|\mathcal{F}(x, \tau) - \mathcal{F}(x, \tau')\| < \varepsilon. \tag{4.7.36}$$

5) Frontiera $\dot{G}$ a lui G nu conţine soluţii (x, τ) ale ecuaţiei (4.7.34).

Vom folosi următoarea notaţie: pentru un τ dat în I, vom nota

$$\Omega(\tau) = \{x \mid x \in B, \quad (x, \tau) \in G\}. \tag{4.7.37}$$

Mulţimea $\Omega(\tau)$ este vidă sau este o mulţime mărginită şi deschisă în B. Fie, într-adevăr, $x \in \Omega(\tau)$. Vom dovedi că există o bulă deschisă $B(x; r) \subset$

$\subset\Omega(\tau)$. Dar din faptul că $x\in\Omega(\tau)$, rezultă că $(x,\tau)\in G$, care este deschisă în $B\times I$, deci există $r>0$, astfel încît, oricare ar fi (x',τ') cu

$$\rho((x,\tau),(x',\tau'))=\|x-x'\|+|\tau-\tau'|<r,$$

avem

$$(x',\tau')\in G.$$

În particular, punctele din $B\times I$ de forma (x',τ) cu $\|x-x'\|<r$ aparţin lui G, căci

$$\rho((x,\tau),(x',\tau))=\|x-x'\|+|\tau-\tau|=\|x-x'\|<r.$$

În concluzie, dacă $x\in B$ este astfel încît $(x,\tau)\in G$, toate punctele $x'\in B$, ce satisfac la $\|x-x'\|<r$, au proprietatea că (x',τ) aparţine încă lui G, ceea ce exprimă faptul că $\Omega(\tau)$ este deschisă în B.

Să caracterizăm frontiera lui G şi a lui $\Omega(\tau)$.

Fie (x_0,τ_0) un punct aparţinînd lui $\dot{G}$. Există atunci un şir de puncte $(x_n,\tau_n)\in G$ astfel încît

$$\rho((x_n,\tau_n),(x_0,\tau_0))\to 0,\qquad n\to\infty,$$

deci astfel încît

$$\|x_n-x_0\|+|\tau_n-\tau_0|\to 0,\qquad n\to\infty$$

deci astfel încît

$$\|x_n-x_0\|\to 0,\quad |\tau_n-\tau_0|\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Fie acum un punct $x_0\in\dot{\Omega}(\tau)$, pentru un τ fixat în I. Există un şir de puncte $x_n\in\Omega(\tau)$ astfel încît $x_n\to x_0$, $n\to\infty$ deci există un şir de puncte x_n din B cu proprietatea că $(x_n,\tau)\in G$ şi astfel încît $\|x_n-x_0\|\to 0$, $n\to\infty$. Aceasta înseamnă însă că $\rho((x_n,\tau),(x_0,\tau))\to 0$, $n\to\infty$, deci că $(x_n,\tau)\to$ $\to(x_0,\tau)$ în metrica lui $B\times I$, şi deci dacă $x_0\in\dot{\Omega}(\tau)$, atunci $(x_0,\tau)\in\dot{G}$. Evident, este adevărată şi afirmaţia reciprocă. De aici rezultă că pentru un τ fixat, ecuaţia $x-\mathcal{F}(x,\tau)=0$ nu poate avea soluţii pe frontiera lui $\dot{\Omega}(\tau)$, căci dacă x_0 ar fi o asemenea soluţie, deci dacă

$$x_0-\mathcal{F}(x_0,\tau)=0,\tag{4.7.38}$$

atunci, cum $(x_0,\tau)\in\dot{G}$, (4.7.38) exprimă faptul că ecuaţia (4.7.34) are o soluţie pe $\dot{G}$, contrar ipotezei 5).

Fie τ fixat în I, fie $\Omega(\tau)$ definit ca mai sus şi fie $\mathcal{F}^{(\tau)}$, $\Phi^{(\tau)}$ definite pe $\overline{\Omega(\tau)}$ cu valori în B, astfel:

$$x\in\overline{\Omega(\tau)},\ x\xrightarrow{\mathcal{F}^{(\tau)}}\mathcal{F}^{(\tau)}(x)=\mathcal{F}(x,\tau),\ ((x,\tau)\in G)$$

$$x\xrightarrow{\Phi^{(\tau)}}\Phi^{(\tau)}(x)=x-\mathcal{F}^{(\tau)}(x).\tag{4.7.39}$$

În virtutea ipotezelor pe care le-am făcut şi a observaţiei că $\dot{\Omega}(\tau)$ nu conţine zerouri ale ecuaţiei $x - \mathcal{F}(x, \tau) = 0$, rezultă că sînt îndeplinite condiţiile pentru a considera $d(\Phi^{(\tau)}, \Omega(\tau), 0)$. Prin definiţie, $d(\Phi^{(\tau)}, \Omega(\tau), 0)$ se va numi indicele total al soluţiilor ecuaţiilor (4.7.34) corespunzătoare valorii τ a parametrului. Dacă $\Omega(\tau)$ este vid, atunci acest indice va fi luat prin definiţie egal cu zero.

Să justificăm afirmaţia: sînt îndeplinite toate condiţiile pentru a putea considera $d(\Phi^{(\tau)}, \Omega(\tau), 0)$.

Traduse în cazul concret al funcţiei $\Phi^{(\tau)}$, mulţimii $\Omega(\tau)$ şi punctului θ, aceste condiţii sînt următoarele:

1) $\Omega(\tau)$ este o mulţime deschisă şi mărginită în B.

Într-adevăr, am demonstrat că $\Omega(\tau)$ este deschisă în B. Că $\Omega(\tau)$ este mărginită, rezultă imediat astfel: oricare ar fi $x \in \Omega(\tau)$, $(x, \tau) \in G$ care fiind mărginită în $B \times I$, există $M > 0$ astfel încît $\rho((x, \tau), (0,0)) = \|x\| + |\tau| < M$, de unde se deduce $\|x\| < M - |\tau|$ cu τ aparţinînd unui interval închis şi mărginit al dreptei reale.

2) $\mathcal{F}^{(\tau)}$ este o aplicaţie complet continuă a lui $\overline{\Omega}(\tau)$ în B.

Într-adevăr,

a) $\mathcal{F}^{(\tau)}$ este continuă. Fie $x, x' \in \overline{\Omega(\tau)}$ şi $\varepsilon > 0$. Avem

$$\|\mathcal{F}^{(\tau)}(x) - \mathcal{F}^{(\tau)}(x')\| = \|\mathcal{F}(x, \tau) - \mathcal{F}(x', \tau)\|, \quad (x, \tau), (x', \tau) \in \overline{G}.$$

Aplicaţia $\mathcal{F}$ este însă continuă pe $\overline{G}$ (uniform continuă cu τ) deci lui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $\delta(x, \varepsilon) > 0$ astfel încît dacă $\rho((x, \tau), (x', \tau)) = \|x - x'\| < \delta$, avem $\|\mathcal{F}(x, \tau) - \mathcal{F}(x', \tau)\| < \varepsilon$.

b) $\mathcal{F}^{(\tau)}(\overline{\Omega}(\tau))$ este relativ compactă în B. Fie, într-adevăr, y_n un şir din $\mathcal{F}^{(\tau)}(\overline{\Omega}(\tau))$. Atunci, $y_n = \mathcal{F}^{(\tau)}(x_n) = \mathcal{F}(x_n, \tau)$ cu $(x_n, \tau) \in \overline{G}$. Dar $\mathcal{F}$ este complet continuă, deci $\mathcal{F}(\overline{G})$ este relativ compactă în B, deci din $y_n = \mathcal{F}(x_n, \tau)$ se poate extrage un subşir convergent în B.

3) $\Phi^{(\tau)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \dot{\Omega}(\tau)$, $(\Phi^{(\tau)}(x) > h > 0, \ x \in \dot{\Omega}(\tau))$. Aceasta revine la a demonstra că ecuaţia $x - \mathcal{F}^{(\tau)}(x) = x - \mathcal{F}(x, \tau) = 0$ nu are soluţii în $\dot{\Omega}(\tau)$, lucru ce a fost dovedit.

Faptul că aceste condiţii sînt îndeplinite, ne permite să refacem toate raţionamentele pe care le-am făcut pentru ecuaţia $x - \mathcal{F}(x) = 0$, mulţimea Ω şi punctul 0, în cazul concret al ecuaţiei $x - \mathcal{F}^{(\tau)}(x) = 0$, mulţimii $\Omega(\tau)$ şi punctului 0. Putem deci enunţa următoarele rezultate:

— lui $\varepsilon = \dfrac{h}{2} > 0$ i se poate asocia o aplicaţie continuă $\mathcal{F}_h^{(\tau)}$ de la $\overline{\Omega(\tau)}$ la un subspaţiu finit dimensional $E_{(\tau)}^{(m_h)}$ al lui B astfel încît pentru orice $x \in \overline{\Omega(\tau)}$,

$$\|\mathcal{F}^{(\tau)}(x) - \mathcal{F}_h^{(\tau)}(x)\| < \frac{h}{2}; \tag{4.7.40}$$

— dacă $E_{(\tau)}^{(n_h)}$ este un subspațiu finit dimensional al lui B care conține pe $E_{(\tau)}^{(m_h)}$ și astfel încît $\Omega(\tau)_{n_h} = \Omega(\tau) \cap E_{(\tau)}^{(n_h)}$ este nevidă, atunci aplicația $\Phi_h^{(\tau)}$ definită de la $\overline{\Omega(\tau)}_{n_h}$ în $E_{(\tau)}^{(n_h)}$ după cum urmează

$$x \in \overline{\Omega(\tau)}_{n_h}, \quad x \xrightarrow{\Phi_h^{(\tau)}} \Phi_h^{(\tau)}(x) = x - \mathcal{F}_h^{(\tau)}(x), \tag{4.7.41}$$

are următoarele proprietăți :

a) $\Phi_h^{(\tau)}$ este continuă ;

b) oricare ar fi $x \in \overline{\Omega(\tau)}_{n_h} \subset \overline{\Omega(\tau)}$,

$$\| \Phi_h^{(\tau)}(x) - \Phi^{(\tau)}(x) \| < \frac{h}{2} \tag{4.7.42}$$

c)
$$\| \Phi_h^{(\tau)}(x) \| > \frac{h}{2}, \tag{4.7.43}$$

oricare ar fi $x \in \dot{\Omega}(\tau)_{n_h} \subset \dot{\Omega}_{n_h}$.

Condițiile a) și c) permit să definim $d(\Phi_h^{(\tau)}, \Omega(\tau)_{n_h}, 0)$ și după cum se știe,

$$d(\Phi^{(\tau)}, \Omega(\tau), 0) = d(\Phi_h^{(\tau)}, \Omega(\tau)_{n_h}, 0) \tag{4.7.44}$$

Așadar, indicele total al soluțiilor ecuației (4.7.13) corespunzător valorii τ a parametrului, poate fi evaluat după formula (4.7.44).

Aceste lucruri fiind precizate, putem enunța

LEMA 4.7.2. *Dacă într-un punct $\tau \in I$ indicele total al soluțiilor ecuației* (4.7.13) *corespunzător acestei valori a parametrului este diferit de* 0, *ecuația* (4.7.13) *admite pentru această valoare a parametrului cel puțin o soluție.*

Demonstrație. Prin ipoteză, $d(\Phi^{(\tau)}, \Omega(\tau), 0) \neq 0$ ceea ce, ținînd seama de (4.7.44), atrage că $d(\Phi_h^{(\tau)}, \Omega(\tau)_{n_h}, 0) \neq 0$ ceea ce, ținînd seama de teorema 4.5.2, atrage că ecuația $\Phi_h^{(\tau)}(x) = 0$ are cel puțin o soluție $x_h \in \Omega(\tau)_{n_h} \subset \Omega(\tau)$. Pe de altă parte, am demonstrat independența de h a membrului drept al egalității (4.7.20). Practic am demonstrat că oricare ar fi $h^* < h$, $h^* > 0$, avem $d(\Phi_h^{(\tau)}, \Omega_{n_h}^{(\tau)}, 0) = d(\Phi_{h^*}^{(\tau)}, \Omega(\tau)_{n_{h^*}}, 0)$ deci ținînd seama de (4.7.44), $d(\Phi_{h^*}^{(\tau)}, \Omega(\tau)_{n_{h^*}}, 0) \neq 0$.

Fie $h_p > 0$, $h_p \to 0$ cu $p \to \infty$. Atunci, de la un rang încolo, $h_p < h$ și deci, aplicînd rezultatele despre care am vorbit,

$$d(\Phi_{h_p}^{(\tau)}, \Omega(\tau)_{n_{h_p}}, 0) \neq 0$$

care, ținînd seama de teorema 4.5.2, atrage că ecuația $\Phi_{h_p}^{(\tau)}(x) = 0$ are cel puțin o soluție x_{h_p} în $\Omega(\tau)_{n_{h_p}} \subset \Omega(\tau)$. Există așadar un șir x_{h_p}, $x_{h_p} \in \Omega(\tau)$, astfel încît

$$\Phi_{h_p}^{(\tau)}(x_{h_p}) = x_{h_p} - \mathcal{F}_{h_p}^{(\tau)}(x_{h_p}) = 0 \tag{4.7.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci astfel încît

$$x_{h_p} = \mathcal{F}_{h_p}^{(\tau)}(x_{h_p}) \tag{4.7.45'}$$

Evident, (4.7.45') se poate scrie sub forma

$$x_{h_p} = [\mathcal{F}_{h_p}^{(\tau)}(x_{h_p}) - \mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_p})] + \mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_p}). \tag{4.7.45''}$$

Dar, $x_{h_p} \in \Omega(\tau)$ deci $(x_{h_p}, \tau) \in G \subset \overline{G}$, deci $\mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_p}) = \mathcal{F}(x_{h_p}, \tau) \in \mathcal{F}(\overline{G})$. Cum $\mathcal{F}(\overline{G})$ este relativ compactă în B, din $\mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_p})$ se poate extrage un subşir convergent

$$\mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_{p_k}}) \to x_0, \qquad k \to \infty \tag{4.7.46}$$

Din (4.7.45'') se obţine

$$x_{h_{p_k}} = [\mathcal{F}_{h_{p_k}}^{(\tau)}(x_{h_{p_k}}) - \mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_{p_k}})] + \mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_{p_k}}). \tag{4.7.47}$$

Dar

$$\|\mathcal{F}_{h_{p_k}}^{(\tau)}(x_{h_{p_k}}) - \mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_{p_k}})\| < \frac{h_{p_k}}{2} \to 0, \qquad k \to \infty \tag{4.7.48}$$

Trecînd la limită cu $k \to \infty$ în (4.7.47) şi ţinînd seama de (4.7.46) şi (4.7.48), rezultă

$$x_{h_{p_k}} \to x_0, \qquad k \to \infty \tag{4.7.49}$$

şi cum $x_{h_{p_k}} \in \Omega(\tau)$ rezultă că $x_0 \in \overline{\Omega}(\tau)$.

Utilizînd continuitatea lui $\mathcal{F}^{(\tau)}$, din (4.7.49) rezultă

$$\mathcal{F}^{(\tau)}(x_{h_{p_k}}) \to \mathcal{F}^{(\tau)}(x_0), \qquad k \to \infty \tag{4.7.50}$$

Din (4.7.46) şi (4.7.50) rezultă

$$x_0 = \mathcal{F}^{(\tau)}(x_0) \quad \text{adică} \quad x_0 - \mathcal{F}(x_0, \tau) = 0$$

şi lema este demonstrată. Ţinînd seama de ipoteze se poate preciza că $x_0 \in \Omega(\tau)$.

În sfîrşit, vom enunţa fără demonstraţie

LEMA 4.7.3. *Indicele total este acelaşi în orice punct din I.*

Fără a fi dificilă, demonstraţia acestei leme este destul de laborioasă. Vom renunţa de aceea la ea pentru a face loc aplicaţiilor.

Vom încheia acest capitol cu următoarea remarcă de mare importanţă în aplicaţii (a se vedea demonstraţia teoremei de existenţă pentru problema torsiunii elasto-plastice (teoria Hencky-Nadai)).

Scanned with OKEN Scanner

Fie, pentru a fixa ideile, că B este un spațiu Banach real iar $I = [0,1]$. Fie $\mathcal{F}$ o aplicație continuă a lui $B \times I$ în B. Presupunem că s-a reușit să se obțină o estimare apriorică, uniformă cu τ pentru orice eventuală soluție a ecuației $x - \mathcal{F}(x, \tau) = 0$, $\|x\| < R$.

Fie

$$G = \{(x, \tau);\ \|x\| + |\tau| < R + 1\},$$

$$\overline{G} = \{(x, \tau);\ \|x\| + |\tau| \leqslant R + 1\},$$

$$\dot{G} = \{(x, \tau);\ \|x\| + |\tau| = R + 1\}.$$

Este evident că nu există nici o soluție a ecuației considerate în $\dot{G}$, deoarece punctele $(x, \tau) \in \dot{G}$ sînt caracterizate de $\|x\| + |\tau| = R + 1$ în timp ce dacă (x, τ) este astfel încît $x - \mathcal{F}(x, \tau) = 0$, atunci $\|x\| + |\tau| < R + 1$.

Această remarcă permite următoarele considerații:

Fie M o aplicație complet continuă a lui B în B (aceasta înseamnă că M este continuă și că oricare ar fi o bulă închisă a lui B, imaginea ei prin M este relativ compactă în B). Fie f un element fixat în B și $\tau \in [0, 1]$ și fie că s-a reușit să se demonstreze că are loc o estimare apriorică uniformă cu a oricărei eventuale soluții a ecuației

$$x = \tau M x + f, \tag{4.7.51}$$

$\|x\| < R$.

Atunci ecuația (4.7.51) are cel puțin o soluție pentru orice $\tau \in [0,1]$.

Într-adevăr, dacă G, $\overline{G}$, $\dot{G}$ sînt cei pe care i-am indicat anterior, atunci operatorul

$$(x, \tau) \in \overline{G},\ (x, \tau) \to \tau M x + f$$

considerat de la $\overline{G}$ în B îndeplinește condițiile în care am dezvoltat teoria Leray-Schauder:

— aplicația $(x, \tau) \to \tau M x + f$ este complet continuă (în virtutea faptului că M este complet continuu pe B);

— ecuația (4.7.51) nu are nici o soluție în $\dot{G}$ (vezi considerațiile anterioare).

Pe de altă parte, pentru o anume valoare a parametrului, anume pentru $\tau = 0$, ecuația (4.7.51) are o soluție anume $x = f$. Rezultă că indicele total al soluțiilor ecuației (4.7.51) corespunzătoare valorii $\tau = 0$ a parametrului este diferit de zero (soluția fiind unică). Dar după lema 4.7.3 el este diferit de zero pentru orice altă valoare a parametrului ceea ce, ținînd seama de lema 4.7.2, atrage că ecuația (4.7.51) are soluție pentru orice valoare a parametrului $\tau \in [0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Teoreme de existenţă şi unicitate în teoria Hencky-Nadai

§ 5.1. Soluţii generalizate (în sens Sobolev) în teoria Hencky-Nadai

5.1.1. Asupra existenţei şi unicităţii soluţiei în sens Sobolev pentru prima problemă fundamentală a teoriei Hencky-Nadai (problema lui Dirichlet). Asupra monotoniei operatorului teoriei Hencky-Nadai în sensul lui Minty-Browder [24 c] [24 f]

Rezultatele care urmează sînt o consecinţă a faptului că operatorul teoriei Hencky-Nadai satisface pe mulţimea funcţiilor admisibile ale primei probleme fundamentale, condiţiile teoremei variaţionale a lui Langenbach (a se vedea teorema 5.1.1.1). Punctul cel mai dificil al demonstraţiei îl va constitui obţinerea unei inegalităţi diferenţiale menite să joace pentru prima problemă fundamentală a teoriei Hencky-Nadai un rol analog celui jucat de inegalitatea lui Korn pentru problema analoagă a teoriei elasticităţii liniare şi izotrope.

În cele ce urmează, $\overline{\Omega}$ este aderenţa în $E_{(3)}$ a unei mulţimi deschise şi mărginite Ω asupra frontierei căreia, $\dot{\Omega}$, facem aceleaşi ipoteze de regularitate pe care le-am făcut cînd am demonstrat teorema variaţională a lui Langenbach.

Vom formula problema matematică a teoriei micilor deformări elasto-plastice (teorie Hencky-Nadai).

Să se găsească funcţiile $u_i \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$, $\varepsilon_{ij} \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ $i, j = 1.2.3$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ji}(\mathbf{x})$, $\sigma_{ij} \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, 2, 3$, $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ji}(\mathbf{x})$, satisfăcînd următorul sistem şi condiţii la limită [55]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \tag{5.1.1.1}$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} = 2\dfrac{\tau_0}{\gamma_0}\bar{\varepsilon}_{ij} \\ \sigma = 3k\varepsilon, \quad 3k = 3\lambda + 2\mu \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \tag{5.1.1.2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{5.1.1.3}$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \qquad i, j = 1, 2, 3, \quad x \in \dot{\Omega}_1 \qquad (5.1.1.4)$$

$$u_i = u_i^0 \qquad i = 1, 2, 3, \quad x \in \dot{\Omega}_2, \ \dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}. \qquad (5.1.1.5)$$

Din punctul de vedere al interpretărilor mecanice, $u_i(x)$ sînt componentele vectorului deplasare în punctul x, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ sînt componentele tensorului deformaţie, iar $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ componentele tensorului tensiune.

Cu $\bar{\sigma}_{ij}$ şi $\bar{\varepsilon}_{ij}$ am notat componentele deviatorului tensorului tensiune, respectiv deformaţie,

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}; & \sigma = \dfrac{\sigma_{mm}}{3}, \\ \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}; & \varepsilon = \dfrac{\varepsilon_{mm}}{3}. \end{cases} \qquad (5.1.1.6)$$

În (5.1.1.6) a fost utilizată regula de sumare a indicelui mut. Fără a mai specifica acest lucru, această regulă va fi utilizată şi mai departe. În (5.1.1.2), τ_0 şi γ_0 reprezintă tensiunea octaedrică, respectiv alunecarea octaedrică şi sînt definite de relaţiile [55]:

$$\tau_0^2 = \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3} \bar{S}_{II},$$

$$\gamma_0^2 = \frac{4}{3} \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{4}{3} \bar{E}_{II}.$$

Legătura între τ_0 şi γ_0 este [55], [42 d]:

$$\tau_0 = g(\gamma_0^2) \gamma_0. \qquad (5.1.1.7)$$

Pentru funcţia g vom formula următoarele condiţii:

a) $g \in C^{(2)}[0, +\infty)$;

b) $g(\xi) \geqslant C_1 > 0, \quad \xi \geqslant 0, \quad C_1 = \text{const}$; (5.1.1.8)

c) $g(\xi) + 2\xi g'(\xi) \geqslant C_2 > 0, \quad \xi \geqslant 0, \quad C_2 = \text{const}.$ (5.1.1.9)

Condiţia (5.1.1.9) este naturală, ea exprimînd faptul bine cunoscut în teoria Hencky-Nadai că tensiunea octaedrică este funcţie crescătoare de γ_0 şi deci

$$\frac{d\tau_0}{d\gamma_0} = g(\gamma_0^2) + 2\gamma_0^2 g'(\gamma_0^2) \geqslant 0. \qquad (5.1.1.10)$$

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede, prin (5.1.1.9) cerem ca g să satisfacă o condiție mai tare decît cea exprimată de (5.1.1.10).

Condiția (5.1.1.8) este de asemenea naturală căci modulul de forfecare plastică este pozitiv

$$G_s(\gamma_0) = g(\gamma_0^2) \geqslant 0. \tag{5.1.1.11}$$

Fie $\mathbf{u}$ funcția vectorială definită pe $\overline{\Omega}$ astfel

$$x \in \overline{\Omega}, \quad x \xrightarrow{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{5.1.1.12}$$

unde u_i sînt componentele vectorului deplasare în punctul x. Ținînd seama de (5.1.1.1), (5.1.1.2), (5.1.1.7), ecuațiile (5.1.1.3) se pot scrie sub forma

$$\mathbf{Pu} = \mathbf{f}, \tag{5.1.1.13}$$

unde

$$\mathbf{Pu} = \begin{pmatrix} P_1\mathbf{u} \\ \mathrm{P}_2\mathbf{u} \\ \mathrm{P}_3\mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{5.1.1.14}$$

$$\mathrm{P}_i\mathbf{u} = -\frac{\partial \sigma_{ij}[\mathbf{u}]}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}[2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + (3k - 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\varepsilon(\mathbf{u})\,\delta_{ij}], \tag{5.1.1.15}$$

cu $\Gamma(\mathbf{u})$ fiind notată forma pătratică nenegativă

$$\Gamma(\mathbf{u}) = \gamma_0^2 = \frac{4}{3}\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \tag{5.1.1.16}$$

iar $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ este vectorul forțelor exterioare în punctul $\mathbf{x}$. Condițiile la limită (5.1.1.4) și (5.1.1.5) se scriu

$$[2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + (3k - 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\varepsilon(\mathbf{u})\,\delta_{ij}]\,n_j = p_i \quad x \in \dot{\Omega}_1 \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{5.1.1.17}$$

și respectiv

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \mathbf{x} \in \dot{\Omega}_2. \tag{5.1.1.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ne vom ocupa de prima problemă fundamentală pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai definit de (5.1.1.13), (5.1.1.14), (5.1.1.15), adică de studiul ecuației (5.1.1.13) cu condiția la frontieră

$$\mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{x} \in \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2. \tag{5.1.1.19}$$

Terminologia este cea utilizată în teoria elasticității pentru problema analoagă.

Fie $\mathbf{L}_2(\Omega)$ spațiul funcțiilor vectoriale ale căror componente sînt de pătrat sumabil pe Ω. După cum se știe $\mathbf{L}_2(\Omega)$ este un spațiu hilbertian în norma dată de produsul scalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega u_i \, v_i \, \mathrm{d}\Omega.$$

Vom nota cu $\mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ mulțimea funcțiilor din $\mathbf{L}_2(\Omega)$ ale căror componente sînt continue împreună cu derivatele lor pînă la al doilea ordin inclusiv în $\bar{\Omega}$ și satisfac (5.1.1.19) pe $\dot{\Omega}$:

$$\mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{C}^{(2)}(\bar{\Omega}), \quad \mathbf{u}|_{\dot{\Omega}} = 0\}. \tag{5.1.1.20}$$

Este evident că $\mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ este o mulțime liniară iar după teorema 4.2.5 este și densă în $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

TEOREMA 5.1.1.1. *Dacă luăm* $H(\Omega) = \mathbf{L}_2(\Omega)$, $M^0 = M = \mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, *operatorul teoriei de plasticitate a lui Hencky-Nadai satisface condițiile teoremei variaționale a lui Langenbach* (*teorema* 2.3.1) *în care condiția* 4° *este înlocuită cu condiția mai tare pretinsă de teorema* 2.3.3, *anume condiția* 2.3.35.

Demonstrație. Ne vom ocupa numai de acelea dintre condițiile teoremei lui Langenbach care nu sînt evidente în cazul concret de care ne ocupăm. Enunțate pentru acest caz concret, verificarea acestor condiții revine la următoarele:

a) *Condiția* 2°: operatorul teoriei Hencky-Nadai este diferențiabil în sens Gâteaux în orice punct $\mathbf{u}$ și după orice direcție $\mathbf{h}$ din $\mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, $(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}$ fiind liniară cu $\mathbf{h}$ și continuă cu $\mathbf{u}$ în orice hiperplan bidimensional ce trece prin $\mathbf{u}$.

Într-adevăr, prin definiție,

$$(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} = \begin{pmatrix} (DP_1)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} \\ (DP_2)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} \\ (DP_3)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} \end{pmatrix}, \tag{5.1.1.21}$$

unde

$$(DP_i)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} = \lim_{t\to 0} \frac{P_i(\mathbf{u}+t\mathbf{h}) - P_i(\mathbf{u})}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_i(\mathbf{u}+t\mathbf{h})|_{t=0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$. calculele dau

$$(DP_i)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} = -\frac{\partial}{\partial x_j}[4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) +$$

$$+ 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 3k\,\varepsilon(\mathbf{h})\,\delta_{ij}], \qquad (5.1.1.22)$$

unde cu $\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ am notat forma biliniară generată de forma pătratică $\Gamma(\mathbf{u})$.

Din relațiile (5.1.1.1). (5.1.1.6) rezultă, evident, că $\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h})$ și $\varepsilon(\mathbf{h})$ sînt liniari în $\mathbf{h}$ și dacă mai ținem seama și de condițiile de regularitate impuse la definirea lui $\Phi^{(2)}(\Omega)$ rezultă, evident, că condiția 2° a teoremei 2.3.1 este satisfăcută.

b) *Condiția* 3°. Pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{g} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, avem

$$\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \langle(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{g}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

Într-adevăr,

$$\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega g_i\,(DP_i)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}\,d\Omega.$$

Ținînd seama de (5.1.1.22) și aplicînd formula lui Green rezultă,

$$\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega [4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 3k\varepsilon(\mathbf{h})\,\delta_{ij}]\,g_{i,j}\,d\Omega =$$

$$= \int_\Omega [4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 3k\,\varepsilon(\mathbf{h})\,\delta_{ij}]\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{g})\,d\Omega$$

care, după calcule simple, se poate pune sub forma

$$\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega [4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{g}) + 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(g) +$$

$$+ 9k\varepsilon(\mathbf{h})\,\varepsilon(\mathbf{g})]\,d\Omega = \qquad (5.1.1.23)$$

$$= \int_\Omega \left\{\frac{3}{2}[g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{h},\mathbf{g}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{g})] + 9k\varepsilon(\mathbf{h})\varepsilon(\mathbf{g})\right\}d\Omega =$$

$$= \langle(D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{g}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (5.1.1.23) rezultă, evident, că $\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{g}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$ pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{h}, \in \mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$.

c) Condiţia (2.3.35) din teorema 2.3.3 : există o constantă $\gamma^2 > 0$ astfel încît pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, $\mathbf{g}$ avem

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant \gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

Într-adevăr, din (5.1.1.23) rezultă că pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, avem

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega \left\{ \frac{3}{2} [g(\Gamma(\mathbf{u})\,\Gamma(\mathbf{h}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h})] + 9k\varepsilon^2(\mathbf{h}) \right\} d\Omega. \quad (5.1.1.24)$$

Să considerăm problema la limită (5.1.1.19) pentru operatorul teoriei elasticităţii liniare şi izotrope relativ la acelaşi domeniu material Ω de frontieră $\dot{\Omega}$:

$$\mathbf{Eu} = \begin{pmatrix} E_1\,\mathbf{u} \\ E_2\,\mathbf{u} \\ E_3\,\mathbf{u} \end{pmatrix}; \quad E_i\,\mathbf{u} = -\frac{\partial\,\sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.1.1.25)$$

cu legea constitutivă a lui Hooke

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\,\bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \sigma = 3k\,\varepsilon, \quad 3k = 3\lambda + 2\mu \quad (5.1.1.26)$$

care se obţine, evident, din legea constitutivă a teoriei Hencky-Nadai înlocuind modulul plastic de forfecare care este funcţie de γ_0 cu modulul elastic de forfecare care este constant.

Făcînd această particularizare în (5.1.1.24) şi ţinînd seama că $\mathbf{E}$ este liniar, se obţine

$$\langle (D\mathbf{E})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \langle \mathbf{Eh}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \frac{3}{2}\int_\Omega [G\,\Gamma(\mathbf{h}) + 6k\,\varepsilon^2(\mathbf{h})]\,d\Omega =$$

$$= \int_\Omega [2G\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 9k\,\varepsilon^2(\mathbf{h})]\,d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{h})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{h})\,d\Omega. \quad (5.1.1.27)$$

Utilizînd faptul că în teoria elasticităţii liniare şi izotrope avem [60], [63]

$$\sigma_{ij}(\mathbf{h})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{h}) \geqslant \mu_0 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon^2_{ij}(\mathbf{h}), \quad \mu_0 = \text{const.} > 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

precum și de inegalitățile lui Friedrichs [27] și Korn [27] se arată [47 a] că pentru orice $\mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, avem

$$\langle \mathbf{Eh}, \mathbf{h} \rangle \geqslant a^2 \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \qquad a^2 = \text{const.} > 0. \tag{5.1.1.28}$$

(Inegalitățile lui Friedrichs și Korn vor fi scrise explicit mai departe cînd vor fi folosite efectiv)

Așadar, dacă ar fi adevărat că

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \langle \mathbf{Eh}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant 0, \tag{5.1.1.29}$$

atunci din (5.1.1.28) și (5.1.1.29) ar rezulta imediat că condiția (2.3.35) din teorema 2.3.3 este satisfăcută.

În acest fel se încearcă în [42 d] să se dovedească faptul că și condiția (2.3.35) este satisfăcută de operatorul teoriei Hencky-Nadai.

Dar din (5.1.1.24) și (5.1.1.27) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \langle \mathbf{Eh}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} =$$

$$= \frac{3}{2} \int_\Omega [(g(\Gamma(\mathbf{u}) - G)\, \Gamma(\mathbf{h}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\, \Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h})]\, d\Omega. \tag{5.1.1.30}$$

Să considerăm cazul unui material care ecruisează monoton și a cărui curbă de încărcare nu are puncte de întoarcere.

Pentru un asemenea material avem [55], [36]

$$G \geqslant \frac{\tau_0}{\gamma_0} \geqslant \frac{d\tau_0}{d\gamma_0}. \tag{5.1.1.31}$$

De aici se deduce că nu putem presupune $g'(\xi) \geqslant 0$, căci din

$$\frac{d\tau_0}{d\gamma_0} = 2g'(\gamma_0^2)\, \gamma_0^2 + g(\gamma_0^2) = 2g'(\gamma_c^2)\, \gamma_0^2 + \frac{\tau_0}{\gamma_0} \geqslant 0$$

rezultă atunci

$$\frac{d\tau_0}{d\gamma_0} - \frac{\tau_0}{\gamma_0} = 2g'(\gamma_0^2)\, \gamma_0^2 \geqslant 0 \tag{5.1.1.32}$$

ceea ce contrazice (5.1.1.31).

Așadar, pentru un asemenea material trebuie presupus $g'(\xi) \leqslant 0$, și atunci, ținînd cont de (5.1.1.31), din (5.1.1.30) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \langle \mathbf{Eh}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant 0 \tag{5.1.1.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci, faptul că pentru operatorul teoriei elasticităţii liniare şi izotrope se ştie că este pozitiv definit pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$, nu poate fi utilizat în maniera expusă mai sus pentru a conchide că operatorul teoriei Hencky-Nadai satisface pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$condiţia (2.3.35). Şi aceasta pentru majoritatea materialelor ecruisabile întîlnite în practică (vezi cazul multor metale), care, se ştie, satisfac condiţiile (5.1.1.31).

De aceea, pentru a dovedi că operatorul teoriei Hencky-Nadai satisface pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$ şi condiţia (2.3.35), vom proceda după cum urmează. Din (5.1.1.24) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant \frac{3}{2}\int_\Omega [g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{h}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h})]\,d\Omega \geqslant \tag{5.1.1.34}$$

$$\geqslant \frac{3}{2}\int_\Omega [g(\Gamma(\mathbf{u})) - 2g'^{-}(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u})]\,\Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega,$$

unde cu g'^{-} am notat partea negativă a funcţiei g' şi am ţinut seama de inegalitatea lui Cauchy

$$\Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \leqslant \Gamma(\mathbf{u})\,\Gamma(\mathbf{h}), \tag{5.1.1.35}$$

adevărată pentru forma pătratică nenegativă $\Gamma(\mathbf{u})$.

Cum funcţia g' poate fi prezentată ca diferenţă între partea ei pozitivă şi cea negativă

$$g' = g'^{+} - g'^{-},\quad g'^{+} = \begin{cases} g', & g' \geqslant 0 \\ 0, & g' < 0 \end{cases} \qquad g'^{-} = \begin{cases} 0, & g' \geqslant 0 \\ -g', & g' < 0 \end{cases},$$

dacă $g' \geqslant 0$, atunci $g'^{-} = 0$ şi din (5.1.1.34) şi (5.1.1.8) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant \frac{3}{2}c_1\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega. \tag{5.1.1.36}$$

Dacă $g' < 0$, atunci $g'^{-} = -g'$ şi din (5.1.1.34) şi (5.1.1.9) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant \frac{3}{2}c_2\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega. \tag{5.1.1.37}$$

Din (5.1.1.36) şi (5.1.1.37) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle \geqslant \frac{3}{2}c\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega, \quad c = \min(c_1\ c_2). \tag{5.1.1.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta că

$$\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega \geqslant \varkappa \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \quad \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega), \quad \varkappa = \text{const.} > 0. \tag{5.1.1.39}$$

Conform inegalității lui Friedrichs [51], avem (vezi demonstrația inegalității în (5.1.6)):

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\,d\Omega \geqslant \frac{1}{K}\|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \tag{5.1.1.40}$$

K fiind o constantă pozitivă ce nu depinde de $\mathbf{h}$, ci numai de domeniul Ω. Cu notațiile

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\mathbf{h}) = \dfrac{1}{2}(h_{i,j} + h_{j,i}) \\ \omega_{ij}(\mathbf{h}) = \dfrac{1}{2}(h_{i,j} - h_{j,i}) \\ \varepsilon(\mathbf{h}) = \dfrac{\varepsilon_{ll}(\mathbf{h})}{3} \end{cases} \tag{5.1.1.41}$$

avem [27]

$$\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h}) - \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{h}) - 9\varepsilon^2(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{3} (h_{i,j}h_{j,i} - h_{i,i}h_{j,j}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} [(h_i h_{j,i})_{,j} - (h_i h_{j,j})_{,i}]. \tag{5.1.1.42}$$

Utilizînd formula lui Green și ținînd seama că $\mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, din (5.1.1.42) se obține

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega - 9\int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{h})\,d\Omega = 0. \tag{5.1.1.43}$$

De aici rezultă

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega \leqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega. \tag{5.1.1.44}$$

În [27] Friedrichs dovedește chiar mai mult, anume

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega \leqslant \beta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega, \quad \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega), \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1. \tag{5.1.1.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru noi va fi suficientă inegalitatea (5.1.1.44). Din (5.1.1.43), ţinînd seama de inegalitatea (5.1.1.44), se obţine

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega - 6\int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{h})\,d\Omega. \qquad (5.1.1.46)$$

Ţinînd seama de (5.1.1.6), (5.1.1.40), (5.1.1.41), (5.1.1.46) avem :

$$\|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\,d\Omega = K\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h}) + \omega_{ij}^2(\mathbf{h}))\,d\Omega =$$

$$= 2K\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega - 3K\int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{h})\,d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2K\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega = \frac{3K}{2}\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega.$$

Aşadar,

$$\frac{3K}{2}\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega = 2K\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega \geqslant K\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\,d\Omega \geqslant \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}. \qquad (5.1.1.47)$$

Din (5.1.1.38) şi (5.1.1.47) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant \frac{c}{K}\,\|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \qquad (5.1.1.48)$$

aşadar operatorul teoriei Hencky-Nadai satisface şi condiţia (2.3.35).

Să remarcăm că inegalitatea

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\,d\Omega \leqslant 2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega, \quad \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega), \qquad (5.1.1.47)'$$

conţinută în (5.1.1.47), joacă pentru prima problemă fundamentală a teoriei Hencky-Nadai acelaşi rol pe care inegalitatea lui Korn

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\,d\Omega \leqslant C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h})\,d\Omega, \quad \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega), \qquad (5.1.1.49)$$

îl joacă pentru prima problemă fundamentală a teoriei elasticităţii liniare şi izotrope.

Scanned with OKEN Scanner

În timp ce cu ajutorul inegalității lui Korn se dovedea că operatorul teoriei elasticității liniare și izotrope este pozitiv definit pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$, cu ajutorul inegalității (5.1.1.47′) dovedim același lucru pentru diferențială în sensul lui Gâteaux a operatorului teoriei micilor deformări elasto-plastice.

Evident (a se vedea și remarca corespunzătoare făcută cu ocazia demonstrării teoremei lui Langenbach), din formula

$$\langle \mathbf{P}\mathbf{u}_1 - \mathbf{P}\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_0^1 \langle (D\mathbf{P})\,(t\mathbf{u}_1 + (1-t)\,\mathbf{u}_2)\cdot$$

$$\cdot(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2),\ \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\,dt$$

și din inegalitatea (5.1.1.48) rezultă că oricare ar fi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$, avem

$$\langle \mathbf{P}\mathbf{u}_1 - \mathbf{P}\mathbf{u}_2,\quad \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} > 0,$$

deci că operatorul teoriei Hencky-Nadai este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$. Din teoremele 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4 și 5.1.1.1 rezultă teorema următoare:

TEOREMA 5.1.1.2. *Dacă funcția materială g a teoriei Hencky-Nadai satisface condițiile* (5.1.1.8), (51.1.9), *atunci*:

a) *operatorul teoriei Hencky-Nadai este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *și deci, dacă există o soluție în* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *a ecuației* (5.1.1.13), *această soluție este unică*;

b) *dacă* $\mathbf{u}_0 \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ *este soluție a ecuației* (5.1.1.13), *atunci* $\mathbf{u}_0$ *realizează pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *minimul funcționalei*

$$F(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) - \langle \mathbf{f},\ \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \tag{5.1.1.50}$$

unde

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int_0^1 \langle P(t\,\mathbf{u}),\ \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \frac{3}{4}\int_\Omega d\Omega \int_0^{\Gamma(\mathbf{u})} g(\xi)\,d\xi + \frac{9}{2}k\int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{u})\,d\Omega \tag{5.1.1.51}$$

$$\langle \mathbf{f},\ \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega F_i\,u_i\,d\Omega \tag{5.1.1.52}$$

și reciproc, elementul mulțimii $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *care realizează minimul funcționalei* (5.1.1.50), (5.1.1.51) *pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *satisface ecuația* (5.1.1.13);

c) *funcționala teoriei plasticității* (5.1.1.50), (5.1.1.51) *este mărginită inferior pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$;

d) *funcționala teoriei plasticității este strict convexă pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$;

Scanned with OKEN Scanner

e) *orice şir minimizant* pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *al funcţionalei teoriei Hencky-Naday are limită în* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (*aceasta este soluţia în sens Sobolev a primei probleme fundamentale a teoriei Hencky-Nadai, conform definiţiei* 2.3.2);

f) *soluţia generalizată (în sens Sobolev) a primei probleme fundamentale pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai este unică.*

REMARCA 1. În esenţă, teorema 5.1.1.2 furnizează unicitatea soluţiei în sens clasic a primei probleme fundamentale pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai şi existenţa şi unicitatea soluţiei în sens Sobolev pentru aceeaşi problemă.

Unicitatea soluţiei în sens clasic a problemei lui Dirichlet pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai cu date nule la frontieră este consecinţă a faptului că operatorul teoriei Hencky-Nadai este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$.

REMARCA 2. Nu a fost considerată decît problema lui Dirichlet cu date nule. Acest fapt a intervenit în mod esenţial în demonstraţie. Mai întîi prin aceea că $\Phi^{(2)}(\Omega)$ este mulţime liniară (ceea ce nu se întîmplă dacă datele sînt neomogene) aşa cum pretinde teorema lui Langenbach iar apoi, datorită faptului că $\Phi^{(2)}(\Omega)$ este densă în $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (lucru esenţial în demonstrarea teoremei lui Langenbach), această din urmă proprietate fiind furnizată de teorema 4.2.5, în care faptul că funcţiile u_i satisfac condiţii omogene la frontieră este de asemenea o presupunere esenţială.

Vom arăta la timpul potrivit cum cu ajutorul unei leme a lui Minty putem reduce problema lui Dirichlet pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai cu date la frontieră neomogene la una cu date omogene pentru care, deci, putem aplica toate consideraţiile anterioare.

REMARCA 3. Cu privire la formula (5.1.1.51), să observăm că avem într-adevăr:

$$\langle P(t\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega u_i P_i(t\mathbf{u})\, d\Omega = -\int_\Omega \mathbf{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(t\mathbf{u})\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sigma_{ij}(t\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega,$$

sau, ţinînd seama de (5.1.1.2), (5.1.1.6), (51.1.1.7),

$$\langle P(t\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega [2g(\Gamma(t\mathbf{u})\, \bar{\varepsilon}_{ij}(t\mathbf{u}) + 3k\varepsilon(t\mathbf{u})\, \delta_{ij}]\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega =$$

$$= t\int_\Omega [2g(t^2\Gamma(\mathbf{u}))\, \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\, \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + 9k\varepsilon^2(\mathbf{u})]\, d\Omega =$$

$$= t\int_\Omega \left[\frac{3}{2} g(t^2\Gamma(\mathbf{u})\, \Gamma(\mathbf{u}) + 9k\varepsilon^2(\mathbf{u})\right] d\Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\Phi(u) = \int_0^1 dt \int_\Omega \left[\frac{3}{2} g(t^2 \Gamma(u)) \, t \, \Gamma(u) + 9kt\varepsilon^2(u) \right] d\Omega$$

Punînd în această formulă $t^2\Gamma(u) = \xi$, se obține (5.1.1.51).

REMARCA 4. Dacă în teoria Hencky-Nadai în locul legii de compresibilitate elastică a volumului se face ipoteza incompresibilității materialului (ipoteză des utilizată în teoriile de plasticitate), atunci din (5.1.1.24) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{L_2(\Omega)} = \frac{3}{2} \int_\Omega [g(\Gamma(\mathbf{u}) \Gamma(\mathbf{h}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u})) \Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h})] \, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2} c \int_\Omega \Gamma(\mathbf{h}) \, d\Omega \qquad (5.1.1.53)$$

Tot din (5.1.1.24), ținînd seama că $\Gamma(\mathbf{0}) = \Gamma(\mathbf{0}, \mathbf{h}) = 0$, rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{L_2(\Omega)} = \frac{3}{2} g(0) \int_\Omega \Gamma(\mathbf{h}) \, d\Omega. \qquad (5.1.1.54)$$

Din (5.1.1.53) și (5.1.1.54) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{c}{g(0)} \langle (D\mathbf{P})(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{L_2(\Omega)} \qquad (5.1.1.55)$$

Ținînd seama de (5.1.1.55) și de teorema 2.6.1 rezultă

TEOREMA 5.1.1.3. *Dacă funcția materială a teoriei Hencky-Nadai satisface condițiile* (5.1.1.8) *și* (5.1.1.9) *iar materialul este presupus incompresibil, atunci soluția în sens Sobolev a problemei lui Dirichlet cu date nule pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai aparține spațiului energetic al operatorului* $(D\mathbf{P})(\mathbf{0})$, *completatul lui* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *în norma generată de produsul scalar,*

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_0 = \langle (D\mathbf{P})(0) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{L_2(\Omega)},$$

deci în norma

$$\|\mathbf{h}\|_0^2 = \langle (D\mathbf{P})(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{L_2(\Omega)} = \frac{3}{2} g(0) \int_\Omega \Gamma(\mathbf{h}) \, d\Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.1.2. Asupra existenței și unicității soluțiilor generalizate (în sens Sobolev) în mecanica firelor elastoplastice [24a] [24g]

În obținerea rezultatelor ce urmează, din punct de vedere matematic tehnica este cea din subparagraful anterior. Interesant din punct de vedere mecanic este considerarea marilor deformări.

Fie (C_0) configurația firului în starea nedeformată

$$x_0 = x_0(s_0), \quad y_0 = y_0(s_0), \quad z_0 = z_0(s_0), \quad 0 \leqslant s_0 \leqslant l_0 \tag{5.1.2.1}$$

și (C) configurația corespunzătoare stării deformate

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l \tag{5.1.2.2}$$

unde cu s_0 și s am notat coordonatele curbilinii corespunzătoare configurațiilor (C_0) și (C) respectiv iar x, y, z sînt considerate funcții de s_0 prin intermediul lui s, $x = x(s(s_0))$, $y = y(s(s_0))$, $z = z(s(s_0))$. Vom presupune că x, y, z, x_0, y_0, z_0, sînt funcții de clasă $C^{(2)}$ în s respectiv s_0 iar $s = s(s_0)$ este de clasă $C^{(2)}$ și inversabilă.

În aceste ipoteze, ecuațiile de echilibru sînt [20 a]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) + X = 0, \quad (x, y, z), \tag{5.1.2.3}$$

literele (x, y, z) în dreapta unei relații însemnînd că încă două relații analoage se pot scrie schimbînd x cu y respectiv cu z.

În (5.1.2.3), X, Y, Z sînt componentele vectorului forțelor exterioare, $\vec{T} = T\vec{\tau}$ este vectorul tensiune în punctul $(x(s), y(s), z(s))$ iar $\vec{\tau}$ este versorul tangentei la curba (C) în acel punct. La ecuațiile (5.1.2.3) va fi adăugată legea constitutivă. Aceasta va fi presupusă de forma [20 a]

$$T = T(\varepsilon), \tag{5.1.2.4}$$

tensiunea T fiind presupusă funcție crescătoare de deformația ε. Ulterior vom impune condiții mai tari funcției $\varepsilon \to T(\varepsilon)$. Deformația ε este definită de relația [20 a]

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}s_0} = [x_{s_0}^2 + y_{s_0}^2 + z_{s_0}^2]^{1/2} - 1, \tag{5.1.2.5}$$

unde, pentru simplificarea scrierii, am folosit notațiile $x_{s_0} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s_0}$ etc. Fie u funcția vectorială definită pe $[0, l]$ astfel

$$s \xrightarrow{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{5.1.2.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde cu u_1, u_2, u_3 au fost notate componentele vectorului deplasare în punctul $(x_0(s_0), y_0(s_0), z_0(s_0))$ din care a provenit prin deformare punctul $(x(s), y(s), z(s))$.

Cum

$$x = x_0 + u_1, \quad (x, y, z) \tag{5.1.2.7}$$

relația (5.1.2.5) devine

$$\varepsilon = [(x_0 + u_1)_{s_0}^2 + (y_0 + u_2)_{s_0}^2 + (z_0 + u_3)_{s_0}^2]^{1/2} - 1 = \varepsilon(\mathbf{u}). \tag{5.1.2.8}$$

Ecuațiile (5.1.2.3) se pot scrie sub forma

$$\mathbf{Pu} = \mathbf{f}, \tag{5.1.2.9}$$

unde

$$\mathbf{Pu} = \begin{pmatrix} P_1\,\mathbf{u} \\ P_2\,\mathbf{u} \\ P_3\,\mathbf{u} \end{pmatrix}; \mathbf{f} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{5.1.2.10}$$

iar

$$P_1\mathbf{u} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[T(\varepsilon(\mathbf{u}))(u_1 + x_0)_s], \quad (x, y, z). \tag{5.1.2.11}$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de studiu ecuației (5.1.2.9) cu condițiile

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(l) = 0. \tag{5.1.2.12}$$

Semnificația mecanică a acestei probleme este evidentă: echilibrul la mari deformări a unui cablu ecruisabil prins la capete.

Vom nota cu $\mathbf{L}_2(0, l)$ spațiul funcțiilor vectoriale definite pe $[0, l]$ ale căror componente sînt de pătrat sumabil pe $(0, l)$ și cu $\Phi^{(2)}(0, l)$ mulțimea funcțiilor din $\mathbf{L}_2(0, l)$ ale căror componente sînt continue împreună cu derivatele lor pînă la al doilea ordin inclusiv pe $[0, l]$ și satisfac condițiile (5.1.2.12):

$$\Phi^{(2)}(0, l) = \{\mathbf{u}/\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{(2)}[0, l], \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(l) = 0\}.$$

După cum se știe, $\mathbf{L}_2(0, l)$ se poate organiza ca spațiu hilbertian cu norma generată de produsul scalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_2(0, l)} = \int_0^l u_i\, v_i\, \mathrm{d}\Omega$$

iar după teorema 4.2.5, $\Phi^{(2)}(0, l)$ este un subspațiu al lui $\mathbf{L}_2(0, l)$ dens în $\mathbf{L}_2(0, l)$.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 5.1.2.1. *Pentru* $M^0 = M = \Phi^{(2)}(0, l)$, $H(\Omega) = \mathbf{L}_2(0, l)$, *operatorul mecanicii firelor ecruisabile* (5.1.2.10), (5.1.2.11) *satisface condiţiile teoremei variaţionale a lui Langenbach* (teorema 2.3.1) *în care condiţia* (4°) *este înlocuită cu condiţia mai tare cerută de teorema* 2.3.3, *anume condiţia* (2.3.35).

Demonstraţie. Ne vom ocupa de acelea dintre condiţii care nu sînt evidente. Transpuse în cazul concret de care ne ocupăm, verificarea acestor condiţii revine la următoarele:

a) *Condiţia* 2°: operatorul mecanicii firelor ecruisabile posedă diferenţială în sensul lui Gâteaux în orice punct $\mathbf{u}$ şi după orice direcţie $\mathbf{h}$ din $\Phi^{(2)}(0, l)$, $(D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}$, fiind liniară cu $\mathbf{h}$ şi continuă cu $\mathbf{u}$ în orice hiperplan bidimensional ce trece prin $\mathbf{u}$.

Într-adevăr, avem

$$(D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} = \begin{pmatrix} (DP_1)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} \\ (DP_2)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} \\ (DP_3)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} \end{pmatrix}$$

cu

$$(D\mathbf{P}_i)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} = \lim_{t \to 0} \frac{P_i(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) - P_i(\mathbf{u})}{t}.$$

Toate calculele care urmează pretind ca T să fie funcţie de clasă $C^{(2)}$.

După calcule relativ simple se obţine

$$(DP_1)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[T'(\varepsilon(\mathbf{u}))(1+\varepsilon(\mathbf{u}))((u_1 + x_0)_s h_{1s} + \right.$$

$$\left. + (u_2 + y_0)_s h_{2s} + (u_3 + z_0)_s h_{3s})(u_1 + x_0)_s + T(\varepsilon(\mathbf{u}) h_{1s}\right]$$

şi relaţii analoage pentru $(DP_2)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}$, $(DP_3)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}$, care demonstrează afirmaţia.

b) *Condiţia* 3°: oricare ar fi $\mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{g} \in \Phi^{(2)}(0, l)$,

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)} = \langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)}. \qquad (5.1.2.14)$$

Într-adevăr, ţinînd seama de (5.1.2.13), după calcule relativ simple se obţine

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)} = \int_0^l \sum_{i=1}^{3} g_i (DP_i)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^l \left[T'(\varepsilon(\mathbf{u}))(1 + \varepsilon(\mathbf{u}))((u_1 + x_0)_s h_{1s} + \ldots)((u_1 + x_0)_s g_{1s} + \ldots) + \right.$$

$$\left. + T(\varepsilon(\mathbf{u}))(h_{1s} g_{1s} + \ldots)\right] \mathrm{d}s = \langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)} \qquad (5.1.2.15)$$

care demonstrează că şi această condiţie este satisfăcută.

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că pentru firele ecruisabile legea constitutivă trebuie să satisfacă la următoarele condiții:

$$T(\varepsilon) \geqslant 0, \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varepsilon} = T'(\varepsilon) \geqslant 0. \tag{5.1.2.16}$$

Aceste condiții sînt necesare și suficiente pentru ca vitezele de propagare ale celor două tipuri de unde (longitudinale și transversale) corespunzătoare cazului dinamic și care sînt [20 a] [24 e], $C_{\mathrm{II}}^2(\varepsilon) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varepsilon}$ și respectiv $C_{\mathrm{I}}^2(\varepsilon) = \frac{1}{\rho_0} \frac{T}{1+\varepsilon}$ să fie reale. Vom cere ca în locul primeia dintre condițiile (5.1.2.16), T să satisfacă condiția mai tare

$$T(\varepsilon) \geqslant C_1 > 0. \tag{5.1.2.17}$$

Atunci, putem demonstra că este satisfăcută și

c) *Condiția* 4°: există o constantă $\gamma^2 > 0$ astfel încît pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(0, l)$, este îndeplinită condiția

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)} \geqslant \gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(0,l)}. \tag{5.1.2.18}$$

Într-adevăr, din (5.1.2.15) urmează că

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)} = \int_0^l [T'(\varepsilon(\mathbf{u}))(1+\varepsilon(\mathbf{u}))((u_1 + x_0)_s h_{1s} + \ldots)^2 +$$

$$+ T(\varepsilon(\mathbf{u}))(h_{1s}^2 + h_{2s}^2 + h_{3s}^2)]\,\mathrm{d}s.$$

Ținînd seama de (5.1.2.16), (5.1.2.17) precum și de inegalitatea lui Friedrichs, din această ultimă relație rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)} \geqslant c_1 \int_0^l (h_{1s}^2 + h_{2s}^2 + h_{3s}^2)\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{c_1}{K} \|h\|^2_{\mathbf{L}_2(0,l)}$$

unde K este constanta ce intervine în inegalitatea lui Friedrichs.

Din teoremele 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4 și 5.1.2.1 rezultă

TEOREMA 5.1.2.2. *Dacă legea constitutivă satisface condițiile* (5.1.2.16), (5.1.2.17) *iar aplicația* $\varepsilon \to T(\varepsilon)$ *este de clasă* $C^{(2)}$, *atunci*:

a) *operatorul mecanicii firelor ecruisabile este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe* $\Phi^{(2)}(0, l)$ *și deci, dacă există în* $\Phi^{(2)}(0, l)$ *o soluție a ecuației* (5.1.2.9), *această soluție este unică*;

b) *dacă* $\mathbf{u}_0 \in \Phi^{(2)}(0, l)$ *este soluție a ecuației* (5.1.2.9), *atunci ea realizează pe* $\Phi^{(2)}(0, l)$ *minimul funcționalei*

$$F(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)}, \tag{5.1.2.19}$$

unde

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int_0^1 \langle \mathbf{P}(t\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)}\, dt, \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{L}_2(0,l)} = \int_0^l X_i\, u_i\, ds, \tag{5.1.20}$$

și reciproc, dacă $\mathbf{u}_0$ *realizează pe* $\Phi^{(2)}(0, l)$ *minimul funcționalei* (5.1.2.19), (5.1.2.20), *atunci* $\mathbf{u}_0$ *este soluție a ecuației* (5.1.2.9) (*și după punctul a) al teoremei, unica soluție în* $\Phi^{(2)}(0, l)$ *a acestei ecuații*);

c) *funcționala* (5.1.2.19), (5.1.2.20) *este mărginită inferior pe* $\Phi^{(2)}(0, l)$;

d) *funcționala* (5.1.2.19), (5.1.1.20) *este strict convexă pe* $\Phi^{(2)}(0, l)$;

e) *orice șir minimizant pe* $\Phi^{(2)}(0, l)$ *al funcționalei* (5.1.2.19) (5.1.2.20) *are limită în* $\mathbf{L}_2(0, l)$ (*aceasta fiind soluția generalizată în sens Sobolev a problemei* (5.1.2.9), (5.1.2.12), *în conformitate cu definiția* (2.3.2));

f) *soluția în sens Sobolev a problemei* (5.1.2.9), (5.1.2.12) *este unică.*

REMARCA 1. Evident, se pot face două remarci analoage primelor două care urmează după teorema 5.1.1.2.

REMARCA 2. Ca și în cazul problemei lui Dirichlet pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai, unicitatea soluției în sens clasic a problemei (5.1.2.9), (5.1.2.12) este o consecință a faptului că operatorul mecanicii firelor ecruisabile este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe $\Phi^{(2)}(0, l)$. La rîndul ei, stricta monotonie a operatorului mecanicii firelor ecruisabile pe $\Phi^{(2)}(0, l)$ este consecință a faptului că acest operator este diferențiabil cu diferențială după Gâteaux pozitivă pe $\Phi^{(2)}(0, l)$, deci că avem satisfăcută inegalitatea (5.1.2.18). Obținerea acestei inegalități a necesitat impunerea asupra legii constitutive a condițiilor (5.1.2.16), (5.1.2.17), condiții necesare și suficiente pentru ca cele două tipuri de unde corespunzătoare cazului dinamic să aibă viteze de propagare reale.

În lucrarea [33], Gurtin și Sternberg obțin o teoremă de unicitate în elasticitate, impunînd coeficienților elastici condiții care, în fapt, își au justificarea tocmai în faptul că dacă ele sînt satisfăcute, vitezele celor două tipuri de unde sînt reale.

REMARCA 3. Rezultatele expuse în acest paragraf se înscriu pe linia unor preocupări mai vechi ale autorului privind mecanica firelor elasto-plastice (a se vedea lucrarea [24 e]). În literatura românească, aceste preocupări au fost inaugurate de teza de doctorat a profesorului Moisil [49] (prima lucrare care utilizează elemente de analiză funcțională în studiul mecanicii firelor flexibile dar inextensibile) și continuate într-o serie de lucrări de N. Cristescu (a se vedea [20 b]—[20 c] precum și capitolul IV al monografiei *Dynamic Plasticity* [20 a]).

Scanned with OKEN Scanner

5.1.3. Asupra existenței și unicității soluțiilor generalizate (în sens Sobolev) în teoria fluajului neliniar, staționar și izotrop [24 b]

În cele ce urmează, asupra lui Ω și a frontierei sale $\dot{\Omega}$ facem aceleași ipoteze ca în cazul problemei lui Dirichlet pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai.

Problema fluajului neliniar, staționar și izotrop, în ipoteza incompresibilității materialului și a existenței potențialului de fluaj este următoarea [55]: să se găsească funcțiile $v_i \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$, $\sigma_{ij} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, 2, 3$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, 2, 3$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, satisfăcînd următorul sistem și condiții la limită:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{5.1.3.1}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}\, n_j = T_i^\circ, & \mathbf{x} \in \dot{\Omega}_1, \\ v_i = v_i^\circ, & \mathbf{x} \in \dot{\Omega}_2, \ \dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}, \end{cases} \tag{5.1.3.2}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \tag{5.1.3.3}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i\,j} + v_{j,i}). \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \tag{5.1.3.4}$$

În aceste relații, v_i și n_i reprezintă componentele carteziene ale vectorului viteză și respectiv ale versorului normalei la $\dot{\Omega}$, σ_{ij} și ε_{ij} sînt componentele tensorului tensiune respectiv ale tensorului vitezelor de deformare, iar

$$U = U(\varepsilon_{kl}) \tag{5.1.3.5}$$

este potențialul tensiunilor de fluaj.

Ca funcție de ε_{ij}, U și derivatele sale pînă la al treilea ordin vor fi presupuse continue.

Fie v funcția vectorială definită pe $\bar{\Omega}$ astfel:

$$\mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad x \xrightarrow{\mathbf{v}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \tag{5.1.3.6}$$

unde v_i reprezintă componentele vectorului vitezei de fluaj în punctul x.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\ \sigma_{ij} = \dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{v})) \end{cases} \tag{5.1.3.7}$$

astfe că ecuaţiile (5.1.3.5) se pot scrie sub forma

$$\mathbf{P}\,\mathbf{v} = \mathbf{f}, \tag{5.1.3.8}$$

unde

$$\mathbf{P}\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} P_1\,\mathbf{v} \\ P_2\,\mathbf{v} \\ P_3\,\mathbf{v} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{5.1.3.9}$$

cu

$$P_i\,\mathbf{v} = -\frac{\partial\,\sigma_{ij}(\mathbf{v})}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}[f_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{v}))] \tag{5.1.3.10}$$

iar f(x) este vectorul forţelor exterioare în punctul x. Operatorul **P** astfel definit se va numi, în mod natural, operatorul teoriei fluajului neliniar, staţionar şi izotrop.

Ne vom ocupa de ecuaţia (5.1.3.8) cu condiţiile la limită

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \dot{\Omega}. \tag{5.1.3.11}$$

În cele ce urmează, $\mathbf{L}_2(\Omega)$ şi $\Phi^{(2)}(\Omega)$ au aceeaşi semnificaţie ca în cazul problemei lui Dirichlet pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai.

TEOREMA 5.1.3.1. *Fie că există o constantă pozitivă* μ_0 *astfel încît*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\,\varepsilon_{ij}\,\partial\,\varepsilon_{kl}}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \geqslant \mu_0 \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\,;\ \mathbf{v},\ \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega),\ \mathbf{x} \in \Omega. \tag{5.1.3.12}$$

Atunci, pentru $H(\Omega) = \mathbf{L}_2(\Omega)$, $M^0 = M = \Phi^{(2)}(\Omega)$, *operatorul teoriei fluajului neliniar, staţionar şi izotrop satisface condiţiile teoremei variaţionale a lui Langenbach (teorema 2.3.1) în care condiţia 4° este înlocuită cu condiţia mai tare (2.3.35) pretinsă de teorema 2.3.3.*

Demonstraţie. Tradusă în cazul concret de care ne ocupăm, verificarea condiţiilor teoremei lui Langenbach revine la următoarele (ne ocupăm,

Scanned with OKEN Scanner

evident, de acelea dintre condițiile teoremei 2.3.1 a căror verificare este netrivială):

a) *Condiția* 2°: operatorul fluajului neliniar staționar și izotrop posedă diferențială în sensul lui Gâteaux $(D\mathbf{P})(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}$ pentru orice $\mathbf{v}, \mathbf{h}\in\Phi^{(2)}(\Omega)$, liniară cu $\mathbf{h}$, continuă cu $\mathbf{v}$ în orice hiperplan bidimensional ce trece prin $\mathbf{v}$;

Într-adevăr, prin definiție,

$$(D\mathbf{P})(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}=\begin{pmatrix}(DP_1)(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}\\(DP_2)(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}\\(DP_3)(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}\end{pmatrix},$$

unde

$$(DP_i)(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}=\lim_{t\to 0}\frac{P_i(\mathbf{v}+t\mathbf{h})-(P_i\,\mathbf{v})}{t}$$

După calcule relativ simple se obține

$$(DP_i)(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl}}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{h})\right]\qquad(5.1.3.13)$$

din care, ținînd seama că ε_{kl} sînt liniari în $\mathbf{h}$ precum și de condițiile de regularitate impuse lui U, rezultă aserțiunea.

b) *Condiția* 3°: oricare ar fi $\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}\in\Phi^{(2)}(\Omega)$,

$$\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h},\,\mathbf{g}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{v})\cdot\mathbf{g},\,\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

Într-adevăr, calcule relativ simple arată că:

$$\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h},\,\mathbf{g}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=\int_\Omega g_i\,(DP_i)(\mathbf{v})\cdot\mathbf{h}\,d\Omega=$$

$$=\int_\Omega -\,g_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl}}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{h})\right]d\Omega=$$

$$=\int_\Omega\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl}}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{h})\,g_{i,j}\,d\Omega$$

$$=\int_\Omega\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl}}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{h})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{g})=\langle(D\mathbf{P})(\mathbf{v})\cdot\mathbf{g},\,\mathbf{h}\rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$$

(5.1.3.14)

Scanned with OKEN Scanner

c) *Condiția* 4°: oricare ar fi $\mathbf{v}, \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, avem

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant \gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \tag{5.1.3.15}$$

cu $\gamma^2 = \text{const.} > 0$.

Într-adevăr, din (5.1.3.14) rezultă

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} (\mathbf{v})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{h})\, \varepsilon_{kl}(\mathbf{h})\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon^2_{ik}(\mathbf{h})\, d\Omega \tag{5.1.3.16}$$

în obținerea inegalității ținîndu-se seama de (5.1.3.12).

Să utilizăm notațiile consacrate [27]

$$\mathbf{H}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} h_i^2\, d\Omega$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{h}) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} h^2_{i,k}\, d\Omega, \tag{5.1.3.17}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{h}) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon^2_{ik}(\mathbf{h})\, d\Omega.$$

Dacă $h \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, are loc inegalitatea lui Friedrichs

$$\mathbf{H}(\mathbf{h}) \leqslant \frac{1}{K} \mathbf{D}(\mathbf{h}) \tag{5.1.3.18}$$

în care K este o constantă pozitivă ce nu depinde de h ci numai de domeniul Ω, și respectiv inegalitatea lui Korn

$$\mathbf{D}(\mathbf{h}) \leqslant \alpha \mathbf{E}(\mathbf{h}), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant 2. \tag{5.1.3.19}$$

Utilizînd (5.1.3.18), (5.1.3.19), din (5.1.3.15) rezultă, evident,

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant \frac{\mu_0 K}{\alpha} \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}. \tag{5.1.3.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din teoremele 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4 și 5.1.3.1 rezultă teorema următoare:

TEOREMA 5.1.3.2. *Dacă potențialul de fluaj satisface condiția* (5.1.3.12), *atunci:*

a) *operatorul teoriei fluajului neliniar, staționar și izotrop este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *și deci, dacă există o soluție în* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *a ecuației* (5.1.3.8), *aceasta este unică;*

b) *dacă* $\mathbf{v}_0 \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ *este soluție a ecuației* (5.1.3.8), *atunci ea realizează pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *minimul funcționalei*

$$F(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \tag{5.1.3.21}$$

unde

$$\Phi(\mathbf{v}) = \int_6^1 \langle \mathbf{P}(t\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \, dt = \int_0^1 dt \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}(t\mathbf{v}) \, \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, d\Omega \tag{5.1.3.22}$$

și reciproc, dacă $\mathbf{v}_0$ *realizează pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *minimul funcționalei* (5.1.3.21), (5.1.3.22), *atunci* $\mathbf{v}_0$ *este soluție a ecuației* (5.1.3.8) *(și după punctul* a) *al teoremei, unica soluție în* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *a acestei ecuații);*

c) *funcționala* (5.1.3.21), (5.1.3.22) *este mărginită inferior pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$;

d) *funcționala* (5.1.3.21), (5.1.3.22) *este strict convexă pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$;

e) *orice șir minimizant al funcționalei* (5.1.3.21), (5.1.3.22) *are limită în* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *(aceasta fiind soluție generalizată în sens Sobolev a problemei lui Dirichlet cu date nule pentru operatorul fluajului neliniar, staționar și izotrop);*

f) *soluția generalizată a problemei lui Dirichlet cu date nule pentru operatorul fluajului neliniar, staționar și izotrop este unică.*

În încheierea acestui subparagraf, dăm cîteva referințe bibliografice. Pentru cazul fluajului liniar, teoreme de existență și unicitate au fost date de Predeleanu [54 a], [54 b]. Cazul neliniar însă, a fost foarte puțin atacat. În cartea sa [55], Rabotnov arată că pentru cazul fluajului neliniar, chiar în ipoteza staționarității și izotropiei, teoreme de existență nu s-au dat. Cît despre unicitate, aceasta a fost demonstrată pentru legi concrete de fluaj rezultate din experiențe [55].

Pentru problema enunțată sub forma relațiilor (5.1.3.1), (5.1.3.2), (5.1.3.3), (5.1.3.4), Rabotnov demonstrează o teoremă de unicitate în mic (terminologia utilizată de Rabotnov este: „единственность в малом" în sensul că dacă σ_{ij}, ε_{ij}, v_i este o soluție a sistemului (5.1.3.1), (5.1.3.2), (5.1.3.3) (5.1.3.4), atunci o soluție de forma $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}$, $v_i + \delta v_i$ nu este posibilă. Acest rezultat este obținut în ipoteza că forma pătratică $\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ este pozitiv definită, așadar o condiție de același tip cu (5.1.3.12).

Să remarcăm, în sfîrșit, că condiții de coercivitate de tipul celei impuse prin (5.1.3.12) potențialului de fluaj, au permis obținerea de rezultate interesante privind existența și unicitatea soluțiilor în elasticitatea neliniară (a se vedea lucrarea lui I. Beju [8]).

Scanned with OKEN Scanner

5.1.4. Asupra existenței și unicității soluției generalizate (în sens Sobolev) pentru problema torsiunii elasto-plastice a barelor cilindrice [42b] [47b]

Ipotezele geometrice și cele privind solicitările exterioare sînt aceleași ca în teoria elasticității liniare și izotrope (a se vedea de exemplu [60]). De aceea nu le vom enunța în mod special și nu vom comenta consecințele lor. Acest lucru este făcut detaliat în [60] și poate fi transpus automat.

Vom relua sistemul de ecuații al teoriei Hencky-Nadai urmărind consecințele ipotezelor simplificatoare corespunzătoare cazului torsiunii elasto-plastice :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{V}} \tag{5.1.4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\sigma}_{ij} = 2\frac{\tau_0}{\gamma_0}\bar{\varepsilon}_{ij}; \qquad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \qquad \sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}; \quad i, j = 1, 2, 3 \\ &\sigma = 3k\varepsilon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{V}} \end{aligned}\right\} \tag{5.1.4.2}$$

$$\tau_0 = g(\gamma_0^2)\,\gamma_0, \qquad \tau_0^2 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}, \qquad \gamma_0^2 = \frac{4}{3}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{V}} \tag{5.1.4.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \quad x \in \mathcal{V} \tag{5.1.4.5}$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad i, j = 1,\ 2,\ 3, \quad x \in S, \tag{5.1.4.6}$$

unde cu $\mathcal{V}$ am notat domeniul material ocupat de bară iar cu S frontiera sa.

Vom nota

$$G_s(\gamma_0^2) = g(\gamma_0^2), \tag{5.1.4.7}$$

$$G_t(\gamma_0^2) = \frac{\mathrm{d}\tau_0}{\mathrm{d}\gamma_0} = g(\gamma_0^2) + 2\gamma_0^2 g'(\gamma_0^2), \tag{5.1.4.8}$$

unde g este funcția materială a teoriei Hencky-Nadai despre care presupunem că este continuă și cu derivate continue pe $[0, \infty)$ pînă la al doilea ordin inclusiv.

Scanned with OKEN Scanner

Vom presupune că:

a) τ_0 este funcție crescătoare de γ_0 (materialul ecruisează) deci că:

$$\frac{d\tau_0}{d\gamma_0} = g(\gamma_0^2) + 2\gamma_0^2 g'(\gamma_0^2) > 0. \tag{5.1.4.9}$$

b) G_s și G_t sînt mărginiți și pozitivi, astfel:

$$0 < C_1 \leqslant G_s(\gamma_0^2) \leqslant M\,;\; G_t(\gamma_0^2) \geqslant C_2 > 0. \tag{5.1.4.10}$$

Din presupunerile de mai sus rezultă posibilitatea de a inversa (5.1.4.3) și de a scrie

$$\gamma_0 = f(\tau_0^2)\,\tau_0. \tag{5.1.4.11}$$

Vom considera că $F_i(x) = 0$, $x \in \mathcal{O}$, fapt ce își are originea în aceea că de cele mai multe ori efectul forțelor volumice este neglijabil în comparație cu încărcările bazelor.

Ipoteza că suprafața laterală este liberă de tensiuni conduce la

$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= 0 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 &= 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.4.12}$$

pe suprafața laterală a barei.

Configurația particulară a corpului și faptul că suprafața laterală este liberă de tensiuni sugerează posibilitatea de a neglija anumite componente ale tensiunii. Este evident că pe frontieră, pe direcții paralele cu Ox, Oy (axa Oz fiind paralelă cu generatoarea), avem

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0.$$

Deoarece diametrul secțiunii este mult mai mic decît lungimea barei, nu ne putem aștepta la apariția de valori importante ale acestor componente nici în interiorul barei, de unde ipoteza de lucru a lui Clebsch:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22}\,;\; x \in \overline{\mathcal{O}}.$$

Componentele σ_{3i} nu pot fi neglijate, căci atunci ar fi contrazise condițiile formulate pe baze

$$\sigma_{3i} = f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde, după cum se ştie, nu sînt cunoscute punctual funcţiile f_i, ci doar torsorul lor.

Vom căuta să satisfacem sistemul de ecuaţii şi condiţiile la limită admiţînd că într-o secţiune z a barei, $(0 \leqslant z \leqslant l)$, componentele deplasării sînt de forma

$$u = -\omega z y, \quad v = \omega z x, \quad w = \omega \varphi(x, y), \quad \omega = \text{const.} > 0. \tag{5.1.4.13}$$

Atunci avem

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{12} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0, \\ &\varepsilon_{13} = \frac{\omega}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right), \\ &\varepsilon_{23} = \frac{\omega}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right). \end{aligned} \tag{5.1.4.14}$$

Ţinînd seama de (5.1.4.14) în legea constitutivă (5.1.4.2), rezultă

$$\begin{aligned} &0 = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{33}, \\ &\sigma_{31} = \omega g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right), \\ &\sigma_{32} = \omega g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right). \end{aligned} \tag{5.1.4.15}$$

Adăugînd la ipoteza lui Clebsch faptul că $\sigma_{33} = 0$ şi ţinînd seamă că $n_3 = \cos(\vec{n}; Oz) = 0$, condiţiile (5.1.4.12) se reduc la una singură şi anume

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = 0 \tag{5.1.4.16}$$

care, ţinînd seama de (5.1.4.15), se scrie sub forma

$$\omega g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\cos(\vec{n}, Ox) + \omega g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)\cos(\vec{n}, Oy) = 0$$

sau

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\vec{n}, Ox) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\vec{n}, Oy) = y\cos(\vec{n}, Ox) - x\cos(\vec{n}, Oy)$$

sau încă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = y\cos(\vec{n}, Ox) - x\cos(\vec{n}, Oy), \quad x \in \dot{\Omega}. \tag{5.1.4.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de ipoteza lui Clebsch și de (5.1.4.15) în care φ este funcție doar de x, y nu și de z, sistemul lui Cauchy se reduce la o singură ecuație, anume

$$\frac{\sigma\partial_{31}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y}=0 \qquad (5.1.4.5')$$

care, ținînd seama de (5.1.4.15), se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\right]=0,\quad x\in\Omega \qquad (5.1.4.18)$$

Așadar, problema s-a redus la găsirea funcției φ de clasă $C^{(2)}(\Omega)\cap C^{(1)}(\overline{\Omega})$ satisfăcînd ecuația (5.1.4.18) cu condiția la frontieră (5.1.4.17). Cu Ω a fost notată o secțiune în bară paralelă cu planul $z=0$ iar cu $\dot{\Omega}$ frontiera sa.

Fie F o funcție de clasă $C^{(2)}(\Omega)\cap C^{(1)}(\overline{\Omega})$ astfel încît

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\omega g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)=\sigma_{13};\quad \frac{\partial F}{\partial x}=-\,\omega g\,(\gamma_0^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)=-\,\sigma_{23} \qquad (5.1.4.19)$$

Dacă F satisface (5.1.4.19), atunci σ_{13} și σ_{23} definite de (5.1.4.19) verifică ecuația (5.1.4.5).

Dar ținînd seama că din (5.1.4.3), (5.1.4.11) rezultă

$$g(\gamma_0^2)\,f(\tau_0^2)=1,$$

egalitățile (5.1.4.19) se scriu

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\omega}{f(\tau_0^2)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)=\sigma_{13};\quad \frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\omega}{f(\tau_0^2)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)=-\sigma_{23}. \qquad (5.1.4.19')$$

Din (5.1.4.19)′ se obține

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\omega}f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial y}+y;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\left[\frac{1}{\omega}f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial x}+x\right] \qquad (5.1.4.19'')$$

astfel că, egalînd derivatele mixte $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}$ și $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}$, se obține ecuația pe care trebuie s-o satisfacă F în Ω:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\omega}f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial x}+x\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\omega}f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial y}+y\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

care se mai scrie, evident,

$$PF = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial y}\right] = 2\omega. \qquad (5.1.4.20)$$

Pentru a obține condiția la limită pe care trebuie s-o satisfacă F, să observăm că, ținînd seama de (5.1.4.19''), condiția (5.1.4.17) pe care trebuie s-o satisfacă φ la frontieră se scrie :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\vec{n}, Ox) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\vec{n}, Oy) =$$

$$= \left[\frac{1}{\omega} f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial y} + y\right]\cos(\vec{n}, Ox) -$$

$$- \left[\frac{1}{\omega} f(\tau_0^2)\frac{\partial F}{\partial x} + x\right]\cos(\vec{n}, Oy) =$$

$$= y\cos(\vec{n}, Ox) - x\cos(n, Oy)$$

sau încă

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cos(\vec{n}, Ox) - \frac{\partial F}{\partial x}\cos(\vec{n}, Oy) = \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \qquad (5.1.4.21)$$

unde s este arcul de curbă pe $\dot{\Omega}$.

Această ultimă condiție arată că F este constantă pe $\dot{\Omega}$, iar în virtutea ipotezei că Ω este simplu conex, se știe că această constantă poate fi totdeauna considerată egală cu zero și, deci, condiția pe care trebuie s-o satisfacă F la frontieră este

$$F = 0, \quad x \in \dot{\Omega}. \qquad (5.1.4.22)$$

Ne vom ocupa de ecuația (5.1.4.20) cu condiția la limită (5.1.4.22). Fie

$$\Phi^{(2)}(\Omega) = \{u \mid u \in C^{(2)}(\bar{\Omega}),\ u|_{\dot{\Omega}} = 0\}. \qquad (5.1.4.23)$$

Vom demonstra că operatorul torsiunii elasto-plastice (vezi (5.1.4.20)) considerat definit de la $\Phi^{(2)}(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$ satisface condițiile teoremei variaționale a lui Langenbach pentru $H(\Omega) = L_2(\Omega)$, $M^0 = M = \Phi^{(2)}(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat poate fi obținut, bineînțeles, lucrînd concret cu operatorul torsiunii elasto-plastice, așa cum am făcut cu operatorul mecanicii firelor ecruisabile și cum vom face mai departe pentru operatorul încovoierii plăcilor elasto-plastice încastrate. Preferăm să obținem rezultatul ca un caz particular al unui rezultat mai general, valabil pentru orice ecuație uniform eliptică [42 a], cu coeficienți suficient de regulați care satisfac în plus anumite condiții ce vor fi precizate ulterior.

DEFINIȚIA 5.1.4.1. Fie $\bar{\Omega}$ aderența în $E^{(m)}$ a unei mulțimi deschise și mărginite Ω de frontieră $\dot{\Omega}$ suficient de regulată. Fie în Ω ecuația

$$Pu = \sum_{i=1}^{m} -\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x_j, u_{x_j}) + a(x_j, u) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \quad (5.1.4.24)$$

cu coeficienți suficient de regulați.

Ecuația (5.1.4.24) se zice *eliptică* în $x \in \Omega$, dacă pentru orice $\xi \in E^{(m)}$, $\xi \neq 0$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$,

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial a_i(x_j, u_{x_j})}{\partial u_{x_k}} \xi_i \xi_k \neq 0 \quad (5.1.4.25)$$

Ecuația (5.1.4.24) se zice eliptică în Ω, dacă (5.1.4.25) este satisfăcută aproape peste tot în Ω.

Ecuația (5.1.4.24) se zice uniform eliptică în Ω, dacă există o constantă $\mu^2 > 0$ astfel încît, oricare ar fi $\xi \in E^{(m)}$, $\xi \neq 0$, avem aproape peste tot în Ω,

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial a_i(x_j, u_{x_j})}{\partial u_{x_k}} \xi_i \xi_k \geqslant \mu^2 \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2. \quad (5.1.4.26)$$

TEOREMA 5.1.4.1. *Să considerăm ecuația* (5.1.4.24), *despre care presupunem că este uniform eliptică în* Ω, *cu condițiile la frontieră*

$$u = 0, \quad x \in \dot{\Omega}. \quad (5.1.4.25)$$

Suficient pentru ca operatorul P *definit de* (5.1.4.24) *considerat definit de la* $(\Phi^{(2)}(\Omega)$ *în* $L_2(\Omega)$ *să satisfacă condițiile*

$$\langle (DP)(u) \cdot h, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle (DP)(u) \cdot g, h \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad u, h, g \in \Phi^{(2)}(\Omega); \quad (5.1.4.27)$$

$$\langle (DP)(u) \cdot h, h \rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \gamma^2 \|g\|^2_{L_2(\Omega)}, \; h \in \Phi^{(2)}(\Omega), \; \gamma^2 = \text{const.} > 0, \quad (5.1.4.28)$$

Scanned with OKEN Scanner

este ca următoarele condiții să fie îndeplinite a.p.t. în Ω:

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} = \frac{\partial a_j}{\partial u_{x_i}}, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{5.1.4.29}$$

$$\frac{\partial a}{\partial u} \geqslant k; \quad \mu^2 \nu^2 + k > 0, \tag{5.1.4.30}$$

unde ν^2 *este constanta din inegalitatea lui Friedrichs corespunzătoare lui* Ω *iar* μ^2 *este constanta din* (5.1.4.26).

Demonstrație. Fie $u, h \in \Phi^{(2)}(\Omega)$. Avem

$$(DP)\ (u) \cdot h = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} h_{x_j}\right] + \frac{\partial a}{\partial u} h. \tag{5.1.4.31}$$

Oricare ar fi $u, h, g \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, avem

$$\langle (DP)\ (u) \cdot h, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega - g \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} h_{x_j}\right] d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial a}{\partial u} hg \, d\Omega \tag{5.1.4.32}$$

Aplicînd formula lui Green în (5.1.4.32) și ținînd seama că g este nul pe frontieră, se obține

$$\langle (DP)\ (u) \cdot h, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} h_{x_j} g_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u} hg\right) d\Omega. \tag{5.1.4.33}$$

Procedînd analog dar schimbînd rolurile lui h și g se obține

$$\langle (DP)\ (u) \cdot g, h\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} g_{x_j} h_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u} gh\right) d\Omega. \tag{5.1.4.34}$$

Din (5.1.4.33) și (5.1.4.34) rezultă că pentru a fi îndeplinită (5.1.4.27) este suficient să avem

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} h_{x_j} g_{x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} g_{x_j} h_{x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial u_{x_i}} g_{x_i} h_{x_j}$$

adică tocmai (5.1.4.29).

Din (5.1.4.33) rezultă

$$\langle (DP)\ (u) \cdot h, h\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} h_{x_j} h_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u} h^2\right) d\Omega. \tag{5.1.4.35}$$

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd succesiv condiția (5.1.4.26) de uniform elipticitate, inegalitatea lui Friedrichs, și condiția (5.1.4.30), din (5.1.4.35) rezultă

$$\langle (DP)(u)\cdot h, h\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \mu^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} h_{x_i}^2 \, d\Omega + k\int_\Omega h^2 \, d\Omega \geqslant (\mu^2\nu^2 + k)\int_\Omega h^2 \, d\Omega$$

ceea ce, în virtutea presupunerii $\mu^2\nu^2 + k > 0$, arată că condiția (5.1.4.28) este îndeplinită pentru $\gamma^2 = \mu^2\nu^2 + k$.

TEOREMA 5.1.4.2. *Fie că sînt îndeplinite următoarele condiții:*

a) $f \in C^{(2)}[0, +\infty)$

b) $f(\xi) \geqslant a_1 > 0, \quad \xi \geqslant 0,$

c) $f(\xi) + 2\xi f'(\xi) \geqslant a_2 > 0, \quad \xi \geqslant 0.$

Atunci, ecuația (5.1.4.20) *a torsiunii elastoplastice este uniform eliptică în* Ω *și sînt satisfăcute condițiile* (5.1.4.29), (5.1.4.30).

Demonstrație. Vom începe cu verificarea condiției (5.1.4.30) (faptul că această condiție este satisfăcută va fi folosit apoi în demonstrarea condiției de uniform elipticitate a ecuației (5.1.4.20)). Aceasta revine la a arăta că

$$\frac{\partial}{\partial F_y}[f(\tau_0^2)F_x] = \frac{\partial}{\partial F_x}[f(\tau_0^2)F_y] \tag{5.1.4.36}$$

unde, pentru prescurtarea scrierii, am folosit notația $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$. Verificarea lui (5.1.4.36) este imediată dacă ținem seama că singurele componente nenule ale tensiunii sînt σ_{31} și σ_{32}, date de (5.1.4.19) și deci

$$\tau_0^2 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right] \tag{5.1.4.37}$$

Verificarea condiției de uniform elipticitate a ecuației torsiunii elastoplastice revine la a dovedi că pentru orice $\xi \in E^{(2)}$, $\xi \neq 0$, $(\xi = (\xi_1, \xi_2))$, avem

$$\frac{\partial}{\partial F_x}(f(\tau_0^2)F_x)\,\xi_1^2 + \frac{\partial}{\partial F_y}(f(\tau_0^2)F_x)\,\xi_1\xi_2 + \frac{\partial}{\partial F_x}(f(\tau_0^2)F_y)\,\xi_2\xi_1 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial F_y}[f(\tau_0^2)F_y]\,\xi_2^2 \geqslant \mu^2(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

sau, ținînd seama de (5.1.4.36), (5.1.4.37), că

$$f(\tau_0^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{2}{3}f'(\tau_0^2)\,[F_x\xi_1 + F_y\xi_2]^2 \geqslant \mu^2(\xi_1^2 + \xi_2^2). \tag{5.1.4.38}$$

Fie τ forma pătratică nenegativă definită pe $E^{(2)}$ după cum urmează

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in E^{(2)}, \quad \tau(\xi) = \frac{1}{3}(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Atunci, avem

$$\tau_0^2 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right] = \tau(\text{grad } F)$$

şi (5.1.4.38) devine

$$f(\tau(\text{grad } F))\tau(\xi) + 2f'(\tau(\text{grad } F))\,\tau^2(\xi, \text{grad } F) \geqslant \mu^2\tau(\xi), \quad (5.1.4.39)$$

unde cu $\tau(\xi, \eta)$ am notat forma biliniară generată de forma pătratică nenegativă τ.

E suficient acum să urmăm tehnica pe care am folosit-o pentru a demonstra că operatorul teoriei Hencky-Nadai satisface pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$ condiţia (2.3.35) (utilizarea acestei tehnici pentru prima dată îi aparţine lui Langenbach [42 c]).

Fie f'^+ şi f'^- partea pozitivă respectiv negativă a funcţiei f' :

$$f'^+ = \begin{cases} f', & f' \geqslant 0 \\ 0, & f' < 0, \end{cases} \quad f'^- = \begin{cases} 0, & f' \geqslant 0 \\ -f', & f' < 0, \end{cases} \quad f' = f'^+ - f'^-.$$

Utilizînd inegalitatea lui Cauchy pentru forma pătratică nenegativă τ, $\tau^2(\xi, \eta) \leqslant \tau(\xi)\tau(\eta)$, $(\xi, \eta) \in E^{(2)}$, rezultă :

$$f(\tau(\text{grad } F))\,\tau(\xi) + 2f'(\tau(\text{grad } F))\,\tau^2(\xi, \text{grad } F) \geqslant \quad (5.1.4.40)$$

$$\geqslant [f(\tau(\text{grad } F)) - 2f'^-(\tau(\text{grad } F))\,\tau(\text{grad } F)]\tau(\xi).$$

Dacă $f' \geqslant 0$, atunci $f'^- = 0$ şi din (5.1.4.40) rezultă

$$f(\tau(\text{grad } F))\,\tau(\xi) + 2f'(\tau(\text{grad } F))\,\tau^2(\xi, \text{grad } F) > a_1\tau(\xi).$$

unde am ţinut seama de b).

Dacă $f' < 0$, atunci $f'^- = -f'$ şi din (5.1.4.40) rezultă

$$f(\tau(\text{grad } F))\,\tau(\xi) + 2f'(\tau(\text{grad } F))\,\tau^2(\xi, \text{grad } F) \geqslant a_2\tau(\xi) \quad (5.1.4.41)$$

de data aceasta ţinînd seama de c).

Scanned with OKEN Scanner

Din (5.1.4.40) și (5.1.4.41) rezultă

$$f(\tau(\operatorname{grad} F))\,\tau(\xi) + 2f'(\tau(\operatorname{grad} F))\,\tau^2(\xi, \operatorname{grad} F) \geqslant a_3\tau(\xi) \quad (5.1.4.42)$$

unde $a_3 = \min(a_1, a_2)$, așadar condiția de uniform elipticitate pentru ecuația torsiunii elasto-plastice este satisfăcută pentru

$$\mu^2 = a_3.$$

Condiția (5.1.4.29) a fost verificată, iar în ceea ce privește condiția (5.1.4.30), deoarece pentru ecuația torsiunii elasto-plastice $a = 0$, urmează $k = \dfrac{\partial a}{\partial u} = 0$, și deci $\mu^2\nu^2 + k = \mu_3\nu^2 > 0$, ν^2 fiind constanta lui Friedrichs corespunzătoare domeniului Ω.

Condițiile teoremei 5.1.4.1 fiind satisfăcute, avem în conformitate cu această teoremă:

a) Considerat definit de la $\Phi^{(2)}(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$, operatorul torsiunii elasto-plastice posedă diferențială în sens Gâteaux, $(DP)(u)\cdot h$, pentru orice $u, h \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, liniară cu h și continuă cu u în orice hiperplan bidimensional ce conține u. Avem (vezi formula (5.1.4.31)):

$$(DP)(u)\cdot h = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} h_{x_j}\right] = -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[f(\tau(\operatorname{grad} u)) + 2f'(\tau(\operatorname{grad} u))\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 2f'(\tau(\operatorname{grad} u))\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{2f'(\tau(\operatorname{grad} u))\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} + \right. \quad (5.1.4.43)$$

$$\left. + \left[f(\tau(\operatorname{grad} u)) + 2f'(\tau(\operatorname{grad} u))\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial y}\right\}$$

b) Oricare ar fi $u, h, g \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, avem

$$\langle (DP)(u)\cdot h, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle (DP)(u)\cdot g, h\rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (5.1.4.44)$$

c) Oricare ar fi $u, h \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, avem (rezultă din (5.1.4.28) care se știe că are loc pentru $\gamma^2 = \mu^2\gamma^2 + k$ ținînd seama că în cazul particular al torsiunii elasto-plastice $k = 0$ iar $\mu^2 = a_3$):

$$\langle (DP)(u)\cdot h, h\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant a_3\nu^2 \|h\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (5.1.4.45)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar din a), b), c) rezultă că operatorul torsiunii elasto-plastice considerat definit de la $\Phi^{(2)}(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$ satisface condiţiile teoremei variaţionale a lui Langenbach (teorema 2.3.1) pentru $H(\Omega) = L_2(\Omega)$, $M^\circ = M = \Phi^2(\Omega)$, în care condiţia 4° este înlocuită cu condiţia mai tare (2.3.35) pretinsă de teorema 2.3.3.

Astfel fiind, putem enunţa următoarea teoremă, consecinţă a teoremelor 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4 şi 5.1.4.2 :

TEOREMA 5.1.4.3. a) *Operatorul torsiunii elasto-plastice este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *şi deci, dacă ecuaţia* (5.1.4.20) *are o soluţie în* $\Phi^{(2)}(\Omega)$, *această soluţie este unică;*

b) *dacă* $F_0 \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ *este soluţie a ecuaţiei* (5.1.4.20), *atunci* F_0 *realizează pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *minimul următoarei funcţionale*

$$\mathcal{F}(u) = \Phi(u) - 2\omega \int_\Omega u \, d\Omega, \tag{5.1.4.45}$$

unde

$$\Phi(u) = \int_0^1 \langle P(tu), u \rangle_{L_2(\Omega)} \, dt = \int_\Omega d\Omega \int_0^{\tau(\operatorname{grad} u)} \frac{1}{2} f(\xi) \, d\xi \tag{5.1.4.46}$$

şi reciproc, dacă $F_0 \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ *realizează pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *minimul funcţionalei* (5.1.4.45), (5.1.4.46), *atunci* F_0 *este soluţie a ecuaţiei* (5.1.4.20) (*şi după punctul a*) *al teoremei unica soluţie în* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ (5.1.4.20);

c) *funcţionala* (5.1.4.45), (5.1.4.46) *este mărginită inferior pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$;

d) *funcţionala* (5.1.4.45), (5.1.4.46) *este strict convexă pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$;

e) *orice şir minimizant al funcţionalei* (5.1.4.45), (5.1.4.46) *pe* $\Phi^{(2)}(\Omega)$ *are limită în* $L_2(\Omega)$ (*conform definiţiei* 2.3.2, *această limită este soluţie generalizată în sens Sobolev pentru problema* (5.1.4.20), (5.1.4.22)).

f) *soluţia generalizată a problemei* (5.1.4.20), (5.1.4.22) *este unică.*

REMARCĂ. În ceea ce priveşte obţinerea efectivă a formulei (5.1.4.46) ea se face cu aceeaşi tehnică folosită pentru obţinerea formulei (5.1.1.51).

5.1.5. Asupra existenţei şi unicităţii soluţiei generalizate (în sens Sobolev) pentru problema încovoierii elastc-plastice a plăcilor încastrate [42d] [47b]

Este cunoscut că ecuaţia încovoierii elasto-plastice a plăcilor este următoarea :

$$Pw = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g(H(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[g(H(w))\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[g(H(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] = f(x, y), \tag{5.1.5.1}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f(x, y)$ este o mărime proporțională cu încărcarea normală considerată pe unitatea de suprafață ce conține punctul (x, y), g este funcția materială a teoriei Hencky-Nadai iar H este forma pătratică nenegativă definită de

$$H(w) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (5.1.5.2)$$

Încovoierea w trebuie să satisfacă următoarele condiții la frontieră:

$$w|_{\dot{\Omega}} = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\dot{\Omega}} = 0, \qquad (5.1.5.3)$$

unde $\dot{\Omega}$ este conturul plăcii iar n este normala exterioară la $\dot{\Omega}$. Despre funcția g vom presupune că este de clasă $C^{(3)}[0, +\infty)$ și că satisface condițiile

$$g(\xi) \geqslant c_1 > 0, \quad \xi \geqslant 0, \qquad (5.1.5.4)$$

$$g(\xi) + 2\xi g'(\xi) \geqslant c_2 > 0, \quad \xi \geqslant 0. \qquad (5.1.5.5)$$

Fie Ω domeniul material ocupat de placă, $\dot{\Omega}$ frontiera sa și

$$\Phi^{(4)}(\Omega) = \left\{w \mid w \in C^{(4)}(\bar{\Omega}),\ w|_{\dot{\Omega}} = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\dot{\Omega}} = 0\right\}. \qquad (5.1.5.6)$$

După teorema 4.2.5, $\Phi^{(4)}(\Omega)$ este densă în $L_2(\Omega)$.

Vom considera operatorul P ca definit de la $\Phi^{(4)}(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$.

TEOREMA 5.1.5.1. *Operatorul încovoierii plăcilor elasto-plastice satisface condițiile teoremei* 2.3.1, *pentru* $H(\Omega) = L_2(\Omega)$, $M^\circ = M = \Phi^{(4)}(\Omega)$, *condiția* 4° *fiind înlocuită cu* (2.3.35).

Demonstrație. Verificarea condițiilor teoremei 2.3.1 revine în cazul concret de care ne ocupăm la următoarele:

a) *Condiția* 2°: operatorul încovoierii plăcilor elasto-plastice posedă diferențială în sens Gâteaux, $(DP)(u).h$, pentru orice u, $h \in \Phi^{(4)}(\Omega)$, liniară cu h și continuă cu u în orice hiperplan bidimensional ce conține u.

Într-adevăr,

$$(DP)(w).h = \lim_{t \to 0} \frac{P(u + th) - P(u)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(u + th)|_{t=0}$$

și după calcule relativ simple se obține :

$$(DP)(w).h = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{g(H(w))\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+2g'(H(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)H(w,h)\right\}+ \tag{5.1.5.7}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{g(H(w))\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)+2g'(H(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)H(w,h)\right\}+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left\{g(H(w))\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+2g'(H(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}H(w,h)\right\}=$$

$$=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y},$$

unde

$$A = g(H(w))\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)+2g'(H(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)H(w,h).$$

$$B = g(H(w))\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)+2g'(H(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)H(w,h), \tag{5.1.5.8}$$

$$C = g(H(w))\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+2g'(H(w))\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}H(w,h)$$

iar $H(w,h)$ este forma biliniară generată de forma pătratică H :

$$H(w,h)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right).$$

b) *Condiția 3°* : oricare ar fi w, h, $g\in\Phi^{(4)}(\Omega)$ avem

$$\langle(DP)(w).h, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle(DP)(w).g, h\rangle_{L_2(\Omega)}. \tag{5.1.5.9}$$

Într-adevăr, avem

$$\langle(DP)(w)).h, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega g[(DP)(w).h]\,d\Omega =$$

$$=\int_\Omega g\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y}\right)d\Omega. \tag{5.1.5.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar ținînd seama de egalitățile evidente,

$$g\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial A}{\partial x} - A\frac{\partial g}{\partial x}\right) + A\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$g\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial B}{\partial y} - B\frac{\partial g}{\partial y}\right) + B\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

$$g\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial C}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial g}{\partial x}\right) + C\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$$

(5.1.5.10) se scrie

$$\langle (DP)(w).h, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial A}{\partial x} - A\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial C}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial B}{\partial y} - B\frac{\partial g}{\partial y} - C\frac{\partial g}{\partial x}\right) + A\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right\} d\Omega$$

Aplicînd formula lui Green și ținînd seama că $g \in \Phi'^{(4)}(\Omega)$ deci satisface la frontieră (5.1.5.3), se obține

$$\langle (DP)(w).h, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left(A\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right) d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \{g(H(w))\,H(h, g) + 2g'(H(w))\,H(w, h)\,H(w, g)\}\,d\Omega$$

$$= \langle (DP)(w).g, h\rangle_{L_2(\Omega)}. \qquad (5.1.5.11)$$

c) *Condiția* 4°: oricare ar fi w, $h \in \Phi^{(4)}(\Omega)$, avem

$$\langle (DP)(w).h, h\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \gamma^2 \|h\|^2_{L_2(\Omega)},\ \gamma^2 = \text{const.} > 0. \qquad (5.1.5.12)$$

Într-adevăr, din (5.1.5.11), pentru $g = h$, rezultă

$$\langle (DP)(w).h, h\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \{g(H(w))\,H(h) + 2g'(H(w))\,H^2(w, h)\}\,d\Omega. \qquad (5.1.5.13)$$

Repetînd raționamentul făcut în cazul problemei lui Dirichlet pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai ca și pentru operatorul torsiunii elasto-plastice, se obține

$$\langle (DP)(w).h, h\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant c\int_\Omega H(h)\,d\Omega, \quad c = \min.(c_1, c_2). \qquad (5.1.5.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom demonstra că există o constantă pozitivă μ_0 astfel încît pentru orice $h \in \Phi^{(4)}(\Omega)$, să avem

$$\int_\Omega H(h)\,d\Omega \geqslant \mu_0 \|h\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{5.1.5.15}$$

Vom începe prin a observa că (vezi Mihlin [47a], p. 167):

$$\int_\Omega H(h)\,d\Omega = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2\right] d\Omega. \tag{5.1.5.16}$$

Într-adevăr, avem

$$H(h) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2\right].$$

Însă

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)\right]$$

astfel că $H(h)$ se scrie

$$H(h) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)\right]$$

de unde

$$\int_\Omega H(h)\,d\Omega = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2\right] d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)\right] d\Omega \tag{5.1.5.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd formula lui Green ultimei integrale și ținînd seama că $h \in \Phi^{(4)}(\Omega)$, deci satisface condițiile la limită (5.1.5.3), rezultă imediat că cea de-a doua integrală din (5.1.5.17) este nulă, deci (5.1.5.17) se reduce la (5.1.5.16).

Pe de altă parte, $h \in \Phi^{(4)}(\Omega)$, deci $\frac{\partial h}{\partial x}$ este de clasă $C^{(3)}(\bar{\Omega})$ și nulă la frontieră (căci h satisface condițiile la frontieră (5.1.5.3)) prin urmare pentru $\frac{\partial h}{\partial x}$ este adevărată inegalitatea lui Friedrichs (demonstrația acestei inegalități va fi dată la sfîrșitul acestui paragraf), deci avem :

$$\int_\Omega \left[\operatorname{grad}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]^2 d\Omega \geqslant K^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 d\Omega$$

care se mai scrie

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2\right] d\Omega \geqslant K^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 d\Omega. \qquad (5.1.5.18)$$

Procedînd analog pentru $\frac{\partial h}{\partial y}$ obținem

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right] d\Omega \geqslant K^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 d\Omega. \qquad (5.1.5.19)$$

Adunînd inegalitățile (5.1.5.18), (5.1.5.19) și aplicînd încă odată inegalitatea lui Friedrichs de data aceasta pentru h, urmează

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2\right] d\Omega \geqslant K^2 \int_\Omega (\operatorname{grad} . h)^2 \, d\Omega \geqslant K^4 \| h \|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (5.1.5.20)$$

Din (5.1.5.14), (5.1.5.16) și (5.1.5.20) rezu tă

$$\langle (DP)(w) . h, h \rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant cK^4 \| h \|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (5.1.5.21)$$

Din teoremele 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4 și 5.1.5.1 se obține următoarea teoremă :

TEOREMA 5.1.5.2. *Dacă funcția materială a teoriei Hencky-Nadai satisface condițiile* (5.1.5.4), (5.1.5.5), *atunci* :

a) *operatorul încovoierii plăcilor elasto-plastice încastrate este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe* $\Phi^{(4)}(\Omega)$ *și deci, dacă există*

o soluție w_0 a ecuației (5.1.5.1) *în* $\Phi^{(4)}(\Omega)$, *atunci această soluție este unică și realizează pe* $\Phi^{(4)}(\Omega)$ *minimul următoarei funcționale*

$$F(w) = \Phi(w) - \langle f, w\rangle_{L_2(\Omega)}, \tag{5.1.5.22}$$

unde

$$\Phi(w) = \int_0^1 \langle (P(tw), w\rangle_{L_2(\Omega)}\, dt = \frac{1}{2}\int d\Omega \int_0^{H(w)} g(\xi)\, d\xi. \tag{5.1.5.23}$$

b) *reciproc, dacă există* w_0 *în* $\Phi^{(4)}(\Omega)$ *care realizează pe* $\Phi^{(4)}(\Omega)$ *minimul funcționalei* (5.1.5.22), (5.1.5.23), *atunci* w_0 *este soluție a ecuației* (5.1.5.1) *(și după punctul a) al teoremei, unica soluție în* $\Phi^{(4)}(\Omega)$ *a acestei ecuații);*

c) *funcționala* (5.1.5.22), (5.1.5.23) *este mărginită inferior pe* $\Phi^{(4)}(\Omega)$;

d) *funcționala* (5.1.5.22), (5.1.5.23) *este strict convexă pe* $\Phi^{(4)}(\Omega)$;

e) *orice șir minimizant pe* $\Phi^{(4)}(\Omega)$ *al funcționalei* (5.1.5.22), (5.1.5.23) *are limită în* $L_2(\Omega)$ *(aceasta fiind, conform definiției* 2.3.2), *soluție generalizată a problemei* (5.1.5.1), (5.1.5.3));

f) *soluția generalizată (în sens Sobolev) a problemei* (5.1.5.1), (5.1.5.3) *este unică.*

Să observăm că din (5.1.5.13) și (5.1.5.14) rezultă

$$\langle (DP(0).h, h\rangle = g(0)\int_\Omega H(h)\, d\Omega \leqslant \frac{g(0)}{c}\langle (DP)(w).h, h\rangle_{L_2(\Omega)},$$

așadar, pentru orice w, $h \in \Phi^{(4)}(\Omega)$, avem

$$\langle (DP)(w).h, h\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{c}{g(0)}\langle (DP)(0).h, h\rangle \tag{5.1.5.24}$$

Ținînd seama de (5.1.5.24) și de teorema 2.6.1, obținem

TEOREMA 5.1.5.3. *Soluția generalizată (în sens Sobolev) a problemei încovoierii plăcilor elasto-plastice încastrate aparține spațiului energetic al operatorului* $(DP)(0)$ *(închiderea lui* $\Phi^{(4)}(\Omega)$ *în norma generată de produsul scalar,*

$$[u, v]_0 = \langle (DP)(0).u, v\rangle_{L_2(\Omega)},\ u, v \in \Phi^{(4)}(\Omega),$$

deci în norma

$$\|u\|_0^2 = \langle (DP)(0).u, u\rangle_{L_2(\Omega)} = g(0)\int_\Omega H(u)\, d\Omega. \tag{5.1.5.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

5.1.6. Spațiii Sobolev. Teoreme de scufundare [59] [47a]

Rezultatele pe care le enunțăm în acest paragraf au scopul de a justifica atît unele considerații ulterioare, cît și de a permite demonstrarea inegalității lui Friedrichs care a intervenit în mod esențial în demonstrarea teoremelor de existență a soluției în sens Sobolev pentru problemele teoriei plasticității de care ne-am ocupat pînă în prezent.

DEFINIȚIA 5.1.6.1. Domeniul $\Omega \subset E^{(m)}$ se numește stelat relativ la un anumit punct, dacă orice rază ce pleacă din acest punct intersectează numai o singură dată frontiera.

În cele ce urmează vor fi considerate numai domenii mărginite care pot fi prezentate sub formă de sumă finită de subdomenii mărginite, fiecare dintre ele fiind stelat în raport cu orice punct al unei anumite sfere.

TEOREMA 5.1.6.1 *Fie că funcția u este sumabilă în Ω și are sumabile în Ω toate derivatele generalizate de ordin $k > 1$. Atunci u are sumabile în Ω toate derivatele generalizate de ordin mai mic decît k.*

DEFINIȚIA 5.1.6.2. Spațiul $W_p^{(l)}(\Omega)$ al lui Sobolev, cu $p > 1$, este format din toate funcțiile care au în Ω toate derivatele generalizate de ordin l și atît aceste derivate cît și funcțiile însăși sînt p-sumabile în Ω. Spațiul lui Sobolev este un spațiu Banach în norma dată de

$$\| u \|^p_{W_p^{(l)}(\Omega)} = \int_\Omega | u |^p \, d\Omega + \int_\Omega \sum \left| \frac{\partial^l_u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^p d\Omega, \qquad (5.1.6.1)$$

suma făcîndu-se pentru toate posibilitățile de alegere ale indicilor i_1, $i_2, \cdots, i_l$, egali sau nu între ei, nici unul dintre ei nedepășind pe m, dimensiunea lui $E^{(m)} \supset \Omega$.

TEOREMA 5.1.6.2. *Dacă $u \in W_p^{(l)}(\Omega)$ și $pl > m$, atunci u este echivalentă cu o funcție continuă în $\overline{\Omega}$.*

Are loc inegalitatea :

$$\| u \|_{C(\Omega)} \leqslant M \| u \|_{W_p^{(l)}(\Omega)}, \qquad (5.1.6.2)$$

unde $C(\Omega)$ este spațiul funcțiilor continue în $\overline{\Omega}$ iar M este o constantă care nu depinde de funcția u.

Operatorul de scufundare al lui $W_p^{(l)}(\Omega)$ în $C(\Omega)$ este complet continuu.

CONSECINȚĂ. Dacă $u \in W_p^{(l)}(\Omega)$ iar k este un număr natural astfel încît $p(l-k) > m$, atunci $u \in C^{(k)}(\Omega)$, și

$$\| u \|_{C^{(k)}(\Omega)} \leqslant M \| u \|_{W_p^{(l)}(\Omega)} \qquad (5.1.6.3)$$

Operatorul de scufundare al lui $W_p^{(l)}(\Omega)$ în $C^{(k)}(\Omega)$ este complet continuu.

TEOREMA 5.1.6.3. *Fie Γ_s, $s \leqslant m$, o varietate suficient de regulată conținută în Ω. Dacă $pl \leqslant m$ și $s > m - pl$, atunci orice funcție $u \in W_p^{(l)}(\Omega)$*

Scanned with OKEN Scanner

este echivalentă cu o funcție definită aproape peste tot în Γ_s și q-sumabilă în Γ_s oricare ar fi q,

$$q \leqslant \frac{ps}{m - pl}. \tag{5.1.6.4}$$

Are loc inegalitatea

$$\| u \|_{L_q(\Gamma_s)} \leqslant M_1 \| u \|_{W_p^{(l)}(\Omega)} \tag{5.1.6.4}$$

unde constanta M_1 nu depinde de funcția u. Dacă q satisface inegalitatea strictă

$$q < \frac{ps}{m - pl}, \tag{5.1.6.5}$$

atunci operatorul de scufundare al lui $W_p^{(l)}(\Omega)$ în $L_q(\Gamma_s)$ este complet continuu.

CONSECINȚĂ. Dacă $u \in W_p^{(l)}(\Omega)$ și $k < l$, atunci

$$u \in W_q^{(l-k)}(\Omega). \tag{5.1.6.6}$$

unde

$$q \leqslant \frac{mp}{m - p(l-k)} \tag{5.1.6.7}$$

și este adevărată inegalitatea

$$\| u \|_{W_q^{(l-k)}(\Omega)} \leqslant M_2 \| u \|_{W_p^{(l)}(\Omega)} \tag{5.1.6.8}$$

unde constanta M_2 nu depinde de funcția u.

TEOREMA 5.1.6.4. *Fie N numărul elementelor unei baze a spațiului polinoamelor de grad mai mic sau egal cu $l-1$, în variabilele $x_1, x_2, \cdots, x_m$. Fie l_j, $j = 1, \cdots, N$, N funcționale liniare și mărginite pe $W_p^{(l)}(\Omega)$ normat cu norma* (5.1.6.1) *care nu se anulează simultan în nici un polinom de grad mai mic sau egal cu $l-1$. Atunci, norma definită de*

$$*\| u \|_{W_p^{(l)}(\Omega)}^p = \sum_{j=1}^{N} | l_j u |^p + \int_\Omega \sum \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^p \mathrm{d}x \tag{5.1.6.9}$$

este echivalentă cu norma definită de (5.1.6.1).

CONSECINȚĂ. Pe $W_2^{(1)}(\Omega)$, norma definită de (5.1.6.1), anume

$$\| u \|_{W_2^{(1)}(\Omega)}^2 = \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, \mathrm{d}\Omega, \tag{5.1.6.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

este echivalentă cu norma furnizată de (5.1.6.9), anume

$$*\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u\,d\Omega\right)^2 + \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega. \tag{5.1.6.10}$$

Ne oprim aici cu enunțarea rezultatelor generale privind spațiile Sobolev. Pentru amănunte se pot consulta de exemplu lucrările lui Sobolev [59] și Nečas [51].

Vom trece acum la demonstrarea inegalității lui Friedrichs, singurul rezultat utilizat în aplicațiile ce le-am dat pentru teoria plasticității și care n-a fost demonstrat în capitolele anterioare.

TEOREMA 5.1.6.5 [51]. *Dacă* $u \in C^{(k)}(\overline{\Omega})$, $k \geqslant 1$ *și* $u = 0$ *pe* $\dot{\Omega}$, *atunci*

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leqslant K^2 \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega,\ K^2 = \text{const.} > 0. \tag{5.1.6.11}$$

Demonstrație. Fie $\tilde{u}$ funcția definită astfel

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \complement\Omega. \end{cases} \tag{5.1.6.12}$$

Deoarece Ω este mărginit, există un cub centrat în origine, $|x_i| < a$, care conține pe Ω. Cum în exteriorul lui Ω funcția $\tilde{u}$ este nulă, oricare ar fi punctul $(x_1, \ldots, x_m)$, avem

$$\tilde{u}(x_1, \ldots, x_m) = \tilde{u}(x_1, \ldots, x_m) - \tilde{u}(-a, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{u}(\xi_1, x_2, \ldots, x_m)\,d\xi_1. \tag{5.1.6.13}$$

Utilizînd inegalitatea lui Schwarz, din (5.1.6.13) se obține

$$[\tilde{u}(x_1, \ldots, x_m)]^2 = \left[\int_{-a}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{u}(\xi_1, x_2, \ldots, x_m)\,d\xi_1\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-a}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{u}(\xi_1, x_2, \ldots, x_m)\right]^2 d\xi_1 \int_{-a}^{x_1} d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-a}^{a} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{u}(\xi_1, x_2, \ldots, x_m)\right]^2 d\xi_1 \int_{-a}^{a} d\xi_1 = 2a \int_{-a}^{a} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{u}(\xi_1, x_2, \ldots, x_m)\right]^2 d\xi_1,$$

de unde urmează

$$\int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} [\tilde{u}(x_1,\dots,x_m)]^2\,dx_1\dots dx_m \leqslant$$

$$\leqslant 2a \int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} \left\{\int_{-a}^{a}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\tilde{u}(\xi_1,x_2,\dots,x_m)\right]^2 d\xi_1\right\} dx_1\dots dx_m =$$

$$= 2a\int_{-a}^{a} dx_1 \int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=2,\dots,m}} \left\{\int_{-a}^{a}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\tilde{u}(\xi_1,x_2,\dots,x_m)\right]^2 d\xi_1\right\} dx_2\dots dx_m =$$

$$= 4a^2 \int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(x_1,x_2,\dots,x_m)\right]^2 dx_1\,dx_2\dots dx_m$$

Raționamentul de mai sus poate fi însă făcut pentru oricare dintre variabilele $x_1,\dots,x_m$, astfel că în definitiv avem

$$\int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} \left[\tilde{u}(x_1,\dots,x_m)\right]^2 dx_1\dots dx_m \leqslant 4a^2 \int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{u}(x_1,\dots,x_m)\right]^2 dx_1\dots dx_m$$

de unde, prin sumare după k de la 1 la m, rezultă

$$m \int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} [\tilde{u}(x_1,\dots,x_m)]^2\,dx_1\dots dx_m \leqslant$$

$$\leqslant 4a^2 \int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{u}(x_1,\dots,x_m)\right]^2 dx_1\dots dx_m$$

sau

$$\int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} [\tilde{u}(x_1,\dots,x_m)]^2\,dx_1\dots dx_m \leqslant \frac{4a^2}{m} \int\limits_{\substack{|x_i|<a\\ i=1,\dots,m}} (\operatorname{grad}\tilde{u})^2\,dx_1\dots dx_m$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\tilde{u}$ este nul în exteriorul lui Ω, din această ultimă inegalitate rezultă

$$\int_\Omega u^2 \, d\Omega \leqslant \frac{4a^2}{m} \int_\Omega (\text{grad } u)^2 \, d\Omega$$

ceea ce demonstrează (5.1.6.11) cu $K^2 = 4a^2/m$.

5.1.7. Extinderea funcționalei teoriei Hencky-Nadai [24f], [24g]

Ne vom ocupa de existența soluției generalizate a problemei de minim pentru funcționale de forma

$$F(u) = F_1(u) + F_2(u), \tag{5.1.7.1}$$

unde

$$F_1(u) = \int_\Omega d\Omega \int_0^{\tau(u)} g(\xi) \, d\xi - \langle f, u \rangle, \tag{5.1.7.2}$$

$$F_2(u) = \int_\Omega \tau_1(u) \, d\Omega. \tag{5.1.7.3}$$

Ideea de a studia asemenea funcționale stă, bineînțeles, în forma funcționalei teoriei Hencky-Nadai (funcționala (5.1.1.50), (5.1.1.51)).

Vom adopta următoarele ipoteze, ce vor da sens relațiilor (5.1.7.1), (5.1.7.2), (5.1.7.3):

1) $\tau(u)$ și $\tau_1(u)$ sînt forme pătratice nenegative relativ la funcția u (scalară sau vectorială) și la derivatele sale (ale componentelor) pînă la un ordin l inclusiv;

2) $g(\xi)$ are derivate continue pînă la al doilea ordin inclusiv și

$$g(\xi) \geqslant a, \quad \xi \geqslant 0; \tag{5.1.7.4}$$

$$g(\xi) + 2\xi g'(\xi) \geqslant a_1, \quad \xi \geqslant 0, \tag{5.1.7.5}$$

unde a și a_1 sînt constante pozitive;

3) există constantele pozitive α_0, α_1, A_0, A_1, astfel încît

$$\alpha_0 + \alpha_1 \xi^{p/2-1} \leqslant g(\xi) \leqslant A_0 + A_1 \xi^{p/2-1}, \quad \infty > p \geqslant 2; \tag{5.1.7.6}$$

4) există constantele pozitive β_0, β_1, B_0, B_1, astfel încît

$$\beta_0 + \beta_1 \xi^{p/2-2} \leqslant g'(\xi) \leqslant B_0 + B_1 \xi^{p/2-2}, \quad \infty > p \geqslant 2; \tag{5.1.7.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

5) aşa cum se obişnuieşte în metodele variaţionale, vom căuta minimul funcţionalei (5.1.7.1) pe o mulţime de funcţii suficient de regulate ce satisfac condiţii la limită liniare şi omogene. Să notăm această mulţime de funcţii cu $\Phi(\Omega)$;

6) $\Phi(\Omega)$ este un subspaţiu al spaţiului lui Sobolev $W_p^{(l)}(\Omega)$. Vom nota cu $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ închiderea lui $\Phi(\Omega)$ în norma lui $W_p^{(l)}(\Omega)$. Fie că pe $\Phi(\Omega)$ norma din $W_p^{(l)}(\Omega)$ este echivalentă cu mărimea

$$\left\{\int_\Omega [\tau(u)]^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p}.$$

Această mărime va fi luată ca normă pe $\Phi(\Omega)$ iar închiderea lui $\Phi(\Omega)$ în această normă va fi notată $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$. Aşadar,

$$\|u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} = \left\{\int_\Omega [\tau(u)]^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p}. \tag{5.1.7.8}$$

7) $f \in \overline{W}_p^{(l)*}(\Omega)$, dualul lui $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$;

8) există o constantă $\gamma > 0$ astfel încît pentru orice $u \in \overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ să avem

$$\int_\Omega [\tau_1(u)]^{p/2}\, d\Omega \leqslant \gamma \int_\Omega [\tau(u)]^{p/2}\, d\Omega. \tag{5.1.7.9}$$

Ipotezele pe care le-am făcut asupra funcţiei g au fost formulate de Mihlin [47 b] în studiul problemei de minim pentru funcţionale de forma lui F_1. Ele sînt destul de naturale pentru funcţia materială a teoriei Hencky-Nadai. Atragem atenţia asupra ipotezei 8). Ea va permite să utilizăm unele dintre rezultatele lui Mihlin stabilite pentru funcţionale de formă particulară în scopul obţinerii de rezultate analoage pentru funcţionale de forma (5.1.7.1). Faptul că această ipoteză va putea fi verificată pentru funcţionala concretă a teoriei Hencky-Nadai va fi, cum vom vedea mai tîrziu, o consecinţă a inegalităţii (5.1.1.39) care se dovedeşte încă odată extrem de importantă în obţinerea unor astfel de rezultate pentru funcţionala teoriei plasticităţii a lui Hencky-Nadai. Realizarea numerică a metodei variaţionale pe care am dezvoltat-o pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai, va fi încă un prilej de a remarca importanţa inegalităţii (5.1.1.39). Nu toate ipotezele 1)—8) vor fi folosite efectiv în cele ce urmează. Cele neutilizate aici şi-au avut însă rolul lor în stabilirea de către Mihlin a unor rezultate pe care le vom utiliza (a se vedea [47b]).

În virtutea ipotezelor 1), 3), 7), funcţionala (5.1.7.1) are sens pe tot $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

În cele ce urmează vom demonstra pentru funcţionala (5.1.7.1) un număr de teoreme care împreună cu alte teoreme deja cunoscute ne

Scanned with OKEN Scanner

vor permite să demonstrăm existența unui punct de minim absolut al funcționalei (5.1.7.1) pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

LEMA 5.1.7.1. *Fie X un spațiu Banach reflexiv, V un subspațiu al său dens. Fie că pe V norma din X este echivalentă cu o altă normă notată $\| \ \|_V$, adică*

$$k_1\|u\|_V \leqslant \|u\|_X \leqslant k_2\|u\|_V, \qquad k_1, k_2 = \text{const.} \qquad (5.1.7.10)$$
$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0.$$

Închiderea lui V în norma $\| \ \|_V$ este un spațiu Banach cu sferă slab compactă.

Demonstrație. Fie $\widetilde{V}$ închiderea lui V în norma $\| \ \|_V$. Vom începe prin a dovedi că

$$\widetilde{V} \subset X$$

cu o injecție continuă.

Fie, într-adevăr, $f : \widetilde{V} \to X$ după cum urmează: dacă $u \in V$, $f(u) = u$. Dacă u este un punct limită al lui $\widetilde{V}$, adică dacă $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, $u_n \in V$, rezultă $\|u_n - u\|_V \to 0$, $n \to \infty$ și deci $\|u_n - u_m\|_V \to 0$, $n, m \to \infty$. Din (5.1.7.10) rezultă atunci $\|u_n - u_m\|_X \to 0$, $n, m \to \infty$ și deci u_n are o limită în X, fie ea u_0.

Punem $f(u) = u_0$.

Corespondența este bine definită, căci dacă considerăm un alt șir $u_n' \in V$ astfel încît $\|u_n' - u\|_V \to 0$, $n \to \infty$, atunci, după raționamentul de mai sus, u_n' are limită în X, fie ea u_0'. Vom dovedi că $u_0' = u_0$.

Într-adevăr, avem

$$\|u_n - u_n'\|_X \leqslant k_2\|u_n - u_n'\|_V.$$

Trecînd la limită în această inegalitate cu $n \to \infty$ și ținînd seama că în norma $\| \ \|_V$, u_n și u_n' au aceeași limită, rezultă că și în X, u_n și u_n' au aceeași limită.

Aplicația f este evident liniară.

Aplicația f este injectivă.

Să presupunem că ar exista $u_1, u_2 \in \widetilde{V}$, $u_1 \neq u_2$ astfel încît $f(u_1 - u_2) = O_X$. Fie $u = u_1 - u_2$. Există $u_n \in V$ astfel încît $\|u_n - u\|_V \to 0$, $n \to \infty$. De aici decurge ca mai sus, că u_n are o limită în X și aceasta, după modul în care a fost definită f, este $f(u) = O_X$, deci $\|u_n\|_X \to 0$, $n \to \infty$. De aici, utilizînd prima dintre inegalitățile (5.1.7.10), rezultă că $\|u_n\|_V \to 0$ și deci $u_n \to O_{\widetilde{V}}$. Pe de altă parte, $u_n \to u$ în $\widetilde{V}$, deci $u = u_1 - u_2 = O_{\widetilde{V}}$, ceea ce contrazice faptul că $u_1 \neq u_2$.

Aplicația f este surjectivă.

Fie, într-adevăr, $u_0 \in X$. Există u aparținînd lui $\widetilde{V}$ astfel încît $f(u) = u_0$.

Într-adevăr, V fiind dens în X, există $u_n \in V$ astfel încît $\|u_n - u_0\|_X \to 0$, $n \to \infty$, sau, $\|u_n - u_m\|_X \to 0$, $n, m \to \infty$. Din (5.1.7.10) rezultă atunci $\|u_n - u_m\|_V \to 0$, $n, m \to \infty$, deci u_n are limită în $\widetilde{V}$, fie ea u. Din modul în care a fost definită aplicaţia f, rezultă $f(u) = u_0$.

Inegalităţile (5.1.7.10) au loc nu numai pe V, ci, într-un anume sens, pe tot $\widetilde{V}$, anume, dacă $u \in \widetilde{V}$ şi $f(u) = u_0 \in X$, avem

$$k_1\|u\|_V \leqslant \|f(u)\|_X \leqslant k_2\|u\|_V \tag{5.1.7.11}$$

a doua dintre inegalităţile (5.1.7.11) demonstrînd continuitatea lui f.

Într-adevăr, fie $u_n \in V$ astfel încît $\|u_n - u\|_V \to 0$, $n \to \infty$. Avem

$$k_1\|u_n\|_V \leqslant \|u_n\|_X \leqslant k_2\|u_n\|_V$$

Trecînd la limită cu $n \to \infty$, de aici rezultă (5.1.7.11). Vom arăta acum că pentru orice $x \in X$, avem

$$\frac{1}{k_2}\|x\|_X \leqslant \|f^{-1}_{(x)}\|_V \leqslant \frac{1}{k_1}\|x\|_X. \tag{5.1.7.12}$$

Fie, într-adevăr, $x_n \in V$ astfel încît $\|x_n - x\|_X \to 0$, $n \to \infty$. Din raţionamente de tipul celor deja făcute rezultă că x_n are limită în $\widetilde{V}$ şi limita este $f^{-1}(x)$. Din (5.1.7.10) rezultă

$$\frac{1}{k_2}\|x_n\|_X \leqslant \|x_n\|_V \leqslant \frac{1}{k_1}\|x_n\|_X.$$

Trecînd la limită cu $n \to \infty$ se obţine (5.1.7.12), de unde continuitatea lui f^{-1}.

Vom dovedi acum că $X^* \subset \widetilde{V}^*$.

Fie, într-adevăr, F definită de la X^* la $\widetilde{V}^*$ după cum urmează:

$$x^* \in X^*, \quad x^* \xrightarrow{F} v^*$$

unde v^* este definită astfel

$$u \in \widetilde{V}, \quad v^*(u) = x^*(f(u)) \tag{5.1.7.12'}$$

Vom arăta că v^* astfel definită este un element al lui $\widetilde{V}^*$. Liniaritatea lui v^* este evidentă.

Pentru a demonstra mărginirea lui v^*, ţinem seama de (5.1.7.11). Avem

$$|v^*(u)| = |x^*(f(u))| \leqslant \|x^*\|\,\|f(u)\|_X \leqslant k_2\|x^*\|\,\|u\|_V,$$

Scanned with OKEN Scanner

așadar, v^* este mărginită și

$$\|v^*\| \leqslant k_2 \|x^*\|. \tag{5.1.7.13}$$

Vom demonstra pentru F aceleași proprietăți ca pentru f. Evident, F este liniară.

Aplicația F este injectivă.

Fie, într-adevăr, $x^* \neq y^*$ în X^*. Să presupunem prin absurd că $F(x^* - y^*) = O_{\widetilde{V}^*}$. Aceasta înseamnă $[F(x^* - y^*)](u) = 0$ oricare ar fi $u \in \widetilde{V}$, adică $(x^* - y^*)(f(u)) = 0$, oricare ar fi $u \in \widetilde{V}$. Cum însă f aplică $\widetilde{V}$ pe X, avem de aici $(x^* - y^*)(x) = 0$ pentru orice $x \in X$, deci $x^* = y^*$.

Aplicația F este surjectivă.

Fie $v_0^* \in \widetilde{V}^*$. Există $x_0^* \in X^*$ astfel ca

$$F(x_0^*) = v_0^*.$$

Funcționala x_0^* cu această proprietate o definim astfel

$$x \in X, \quad x_0^*(x) = v_0^*(f^{-1}(x)).$$

Ea este, evident, o funcțională liniară și mărginită pe X căci după (5.1.7.12),

$$|x_0^*(x)| = |v_0^*(f^{-1}(x))| \leqslant \|v_0^*\| \, \|f^{-1}(x)\|_V \leqslant \|v_0^*\| \frac{1}{k_1} \|x\|_X,$$

așadar,

$$\|x_0^*\| \leqslant \frac{1}{k_1} \|v_0^*\| \tag{5.1.7.14}$$

Să dovedim că $F(x_0^*) = v_0^*$.

Într-adevăr,

$$[F(x_0^*)](u) = x_0^*(f(u)) = v_0^*(f^{-1}(f(u))) = v_0^*(u)$$

pentru orice $u \in \widetilde{V}$.

Să dovedim acum că $\widetilde{V}$ este cu sferă slab compactă.

Fie u_n un șir mărginit din $\widetilde{V}$, $\|u_n\|_V \leqslant M$, $n \in N$. Vom dovedi că din el se poate extrage un subșir slab convergent.

Din $\|u_n\| \leqslant M$, $n \in N$, și din (5.1.7.11) rezultă că șirul $f(u_n)$ este mărginit în norma lui X. Spațiul X fiind reflexiv, este cu sferă slab compactă (teorema lui Șmulian), așadar din $f(u_n)$ se poate extrage un subșir slab convergent în X pe care-l vom nota tot cu $f(u_n)$ și a cărui

limită aparţine de asemenea lui X, căci orice spaţiu reflexiv este slab complet. Această limită aparţinînd lui X este de forma $f(u_0)$, unde $u_0 \in \widetilde{V}$. Aşadar, pentru orice $x^* \in X^*$,

$$x^*[f(u_n - u_0] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dacă se ţine seama de (5.1.7.12'), din această ultimă relaţie rezultă

$$[F(x^*)]\,(u_n - u_0) \to 0, \quad n \to \infty$$

şi cum F aplică X^* pe $\widetilde{V}^*$, această ultimă relaţie înseamnă u_n converge slab la u_0 în $\widetilde{V}$.

TEOREMA 5.1.7.1. *Spaţiul* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ *este cu sferă slab compactă.*

Demonstraţie. Se ştie că $W_p^{(l)}(\Omega)$ este un spaţiu Banach reflexiv [51] deci $\underline{W_p^{(l)}}(\Omega)$ este reflexiv, fiind un subspaţiu închis al unui spaţiu Banach reflexiv, anume închiderea lui $\Phi(\Omega)$ în norma lui $W_p^{(l)}(\Omega)$. Pentru a conchide că $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ este reflexiv, este suficient să aplicăm lema 5.1.7.1 pentru

$$X = \underline{W_p^{(l)}}(\Omega)$$

$$V = \Phi(\Omega)$$

$$\|u\|_V = \left\{\int_\Omega [\tau(u)]^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p}, \quad u \in \Phi(\Omega).$$

TEOREMA 5.1.7.2. *Funcţionala* (5.1.7.1) *este continuă pe* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

Demonstraţie. Pentru F_1 lucrul a fost demonstrat de Mihlin [47b]. Rămîne să dovedim continuitatea lui F_2 pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$. Acest lucru va fi făcut cu aceeaşi tehnică utilizată de Mihlin pentru F_1, urmînd, în plus, să ţinem seama de ipoteza (5.1.7.9).

Va fi suficient să arătăm că

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n) - \tau_1(u)|\, d\Omega \to 0 \quad \text{cu} \quad \|u_n - u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \to 0.$$

Dar

$$\tau_1(u_n) - \tau_1(u) = \tau_1(u_n - u,\ u_n + u),$$

unde cu $\tau_1(u, v)$ am notat forma biliniară generată de forma pătratică $\tau_1(u)$.

Conform inegalităţii lui Cauchy

$$|\tau_1(u_n - u,\ u_n + u)| \leqslant [\tau_1(u_n - u]^{1/2}\,[\tau_1(u_n + u)]^{1/2}$$

şi deci

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n) - \tau_1(u)|\, d\Omega \leqslant \int_\Omega [\tau_1(u_n - u)]^{1/2}\,[\tau_1(u_n + u)]^{1/2} \cdot 1\, d\Omega$$

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd inegalitatea lui Hölder cu coeficienții p, p, r, unde r este astfel încît

$$\frac{2}{p} + \frac{1}{r} = 1,$$

rezultă

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n) - \tau_1(u)|\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_\Omega [\tau_1(u_n - u)]^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p} \left\{\int_\Omega [\tau_1(u_n + u)]^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p} \left(\int_\Omega d\Omega\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^{\frac{2}{p}} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{r}} \|u_n - u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \|u_n + u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)},$$

în obținerea ultimei inegalități ținîndu-se seama de (5.1.7.9). Cum din $\|u_n - u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \to 0$ cu $n \to \infty$, rezultă că $\|u_n + u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}$ este mărginită, ultima inegalitate demonstrează teorema.

TEOREMA 5.1.7.3. *Oricare ar fi* $u \in \overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, *avem*

$$\left|\int_\Omega [\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}]\, d\Omega\right| \to 0 \quad \text{cu} \quad \|u_n - u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \to 0. \quad (5.1.7.17)$$

Demonstrație. Va fi suficient să arătăm că

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}|\, d\Omega \to 0 \quad \text{cu} \quad \|u_n - u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \to 0. \quad (5.1.7.18)$$

Avem [47 b]

$$\frac{\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}}{\tau_1(u_n) - \tau_1(u)} = \frac{p}{2} [\theta_n \tau_1(u_n) + (1 - \theta_n)\, \tau_1(u)]^{p/2-1}, \quad (5.1.7.19)$$

$$0 < \theta_n < 1.$$

Cum pentru orice numere nenegative a, b, k,

$$(a + b)^k \leqslant 2^k \max(a^k, b^k) \leqslant 2^k (a^k + b^k),$$

rezultă

$$[\theta_n \tau_1(u_n) + (1 - \theta_n)\tau_1(u)]^{p/2-1} \leqslant 2^{p/2-1} [\tau_1(u_n)^{p/2-1} + \tau_1(u)^{p/2-1}] \quad (5.1.7.20)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de (5.1.7.19) şi (5.1.7.20), se obţine

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}|\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p/2-2}\, p \int_\Omega |\tau_1(u_n) - \tau_1(u)|\, (\tau_1(u_n)^{p/2-1} + \tau_1(u)^{p/2-1})\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p/2-2}\, p \int_\Omega [\tau_1(u_n-u)]^{1/2}[\tau_1(u_n+u)]^{1/2}(\tau_1(u_n)^{p/2-1}+\tau_1(u)^{p/2-1})\, d\Omega. \quad (5.1.7.21)$$

Aplicînd acestei ultime integrale inegalitatea lui Hölder cu coeficienţii $p, p, r, \frac{2}{p} + \frac{1}{r} = 1$, şi ţinînd seama de (5.1.7.9) se obţine

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}|\, d\Omega \leqslant 2^{p/2-2}\, k^{\frac{2}{p}}\, p \| u_n - u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \| u_n + u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \times$$

$$\times \left\{ \int_\Omega [\tau_1(u_n)^{\frac{p-2}{2}} + \tau_1(u)^{\frac{p-2}{2}}]^r\, d\Omega \right\}^{1/r}. \quad (5.1.7.22)$$

Dar

$$\int_\Omega [\tau_1(u_n)^{\frac{p-2}{2}} + \tau_1(u)^{\frac{p-2}{2}}]^r\, d\Omega \leqslant 2^r \int_\Omega \left\{ [\tau_1(u_n)^{\frac{p-2}{2}}]^r + [\tau_1(u)^{\frac{p-2}{2}}]^r \right\} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2^r \cdot \gamma\, (\| u_n \|^p_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} + \| u \|^p_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}), \quad (5.1.7.23)$$

unde am ţinut seama că $r = \dfrac{p}{p-2}$ şi de asemenea de (5.1.7.9). Din (5.1.7.22) şi (5.1.7.23), ţinînd seama de faptul că şirurile $\| u_n + u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}$ şi $\| u_n \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}$ sînt mărginite, rezultă (5.1.7.18), deci (5.1.7.17).

TEOREMA 5.1.7.4. *Funcţionala* (5.1.7.1) *este strict convexă pe* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

Demonstraţie. Pentru F_1 lucrul este dovedit [47b]. Vom arăta că F_2 este convexă pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, aceasta fiind suficient pentru ca $F_1 + F_2$ să fie strict convexă pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$. Pentru aceasta este nevoie de următoarele rezultate intermediare:

1) F_2 este derivabilă în sensul lui Gâteaux pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, deci există

$$F_2' : \overline{W}_p^{(l)}(\Omega) \to \overline{W}_p^{(l)*}(\Omega)$$

astfel încît

$$\langle F_2'(u), h \rangle = \langle (\operatorname{grad} F_2)\, (u), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{F_2(u + th) - F_2(u)}{t}. \quad (5.1.7.24)$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr,

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_2(u+th)-F_2(u)}{t}=2\int_\Omega \tau_1(u,h)\,d\Omega. \qquad (5.1.7.25)$$

Liniaritatea în h a membrului drept în (5.1.7.25) este evidentă. Vom dovedi și mărginirea lui în h.

Utilizînd inegalitatea lui Hölder cu coeficienții p, p, r, $\frac{2}{p}+\frac{1}{r}=1$, avem

$$\left|\int_\Omega \tau_1(u,h)\,d\Omega\right|\leqslant\int_\Omega|\tau_1(u,h)|\,d\Omega\leqslant\int_\Omega[\tau_1(u)]^{1/2}[\tau_1(h)]^{1/2}\cdot 1\,d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_\Omega[\tau_1(u)]^{p/2}\,d\Omega\right\}^{1/p}\left\{\int_\Omega[\tau_1(h)]^{p/2}\,d\Omega\right\}^{1/p}(\text{mes }\Omega)^{1/r}$$

iar dacă ținem seama de (5.1.7.9) și (5.1.7.8) rezultă

$$\left|\int_\Omega \tau_1(u,h)\,d\Omega\right|\leqslant\gamma^{2/p}(\text{mes }\Omega)^{1/r}\|u\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}\|h\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}.$$

2) Operatorul

$$P=F_2'=\text{grad }F_2$$

are derivată în sens Gâteaux pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ și

$$\langle P'(u)\cdot h,g\rangle=\langle P'(u)\cdot g,h\rangle,\qquad u,h,g\in\overline{W}_p^{(l)}(\Omega), \qquad (5.1.7.26)$$

$$\langle P'(u)\cdot h,h\rangle\geqslant 0,\qquad u,h\in\overline{W}_p^{(l)}(\Omega). \qquad (5.1.7.27)$$

Într-adevăr, ținînd seama de (5.1.7.25) rezultă ușor

$$\left\langle\lim_{t\to 0}\frac{P(u+tg)-P(u)}{t},h\right\rangle=2\int_\Omega\tau_1(g,h)\,d\Omega. \qquad (5.1.7.28)$$

După un raționament făcut anterior,

$$\left|\int_\Omega\tau_1(g,h)\,d\Omega\right|\leqslant\gamma^{2/p}(\text{mes }\Omega)^{1/r}\|g\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}\|h\|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}$$

Scanned with OKEN Scanner

aşadar, membrul drept din (5.1.7.28) este o formă biliniară mărginită pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ şi deci P este derivabil în sensul lui Gâteaux pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ şi avem

$$\langle P'(u)\cdot g, h\rangle = \langle F_2''(u)\cdot g, h\rangle = 2\int_\Omega \tau_1(g, h)\,d\Omega = \langle P'(u)\cdot h, g\rangle. \qquad (5.1.7.29)$$

Din (5.1.7.29) rezultă

$$\langle P'(u)\cdot h, h\rangle = \langle F_2''(u)\cdot h, h\rangle = 2\int_\Omega \tau_1(h)\,d\Omega. \qquad (5.1.7.30)$$

Faptul că F_2 este convexă pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ rezultă acum din teorema 2.4.3 pentru

$$\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(P'(u)) = \mathcal{D}(F_2) = \overline{W}_p^{(l)}(\Omega).$$

Se putea dovedi că F_2 este convexă pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ cu o demonstraţie mai simplă decît cea necesară pentru a demonstra teorema 2.4.3, anume, după ce am obţinut (5.1.7.30), să ţinem seama de teorema următoare, care completează rezultatul furnizat de teorema 2.1.3 :

TEOREMA 5.1.7.5. *Fie că funcţionala Φ are pe spaţiul Banach reflexiv B derivate în sensul lui Gâteaux de primul şi al doilea ordin şi că*

$$\langle \Phi''(u)\cdot h, h\rangle \geqslant 0, \qquad u, h \in B. \qquad (5.1.7.31)$$

Atunci Φ este convexă pe B.

Demonstraţie. După cum am văzut (a se vedea teorema 2.1.3), condiţia (5.1.7.31) are drept consecinţă inegalitatea

$$\Phi(u_1) - \Phi(u_2) - \Phi'(u_2)\cdot(u_1 - u_2) \geqslant 0, \qquad u_1, u_2 \in B. \qquad (5.1.7.32)$$

Utilizînd (5.1.7.32) se obţine

$$\Phi(u_1) - \Phi(u_2) - 2\Phi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \left[\Phi(u_1) - \Phi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right] +$$

$$+\left[\Phi(u_2) - \Phi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right] \geqslant \Phi'\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\cdot\frac{u_1-u_2}{2} +$$

$$+\Phi'\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\cdot\frac{u_2-u_1}{2} = 0$$

deci Φ este convexă pe B.

Evident, dacă în (5.1.7.31) inegalitatea este strictă, atunci în (5.1.7.32) inegalitatea este strictă şi cu raţionamentul de mai sus se dovedeşte că Φ este strict convexă pe B.

Un rezultat oarecum reciproc celui furnizat de teorema 5.1.7.5, anume că gradientul unei funcţionale convexe este monoton în sensul lui Minty-Browder, aparţine lui Minty [48b].

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 5.1.7.6. *Funcționala* (5.1.7.1) *este slab inferior semicontinuă pe* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

Demonstrație. Pentru F_1 rezultatul este cunoscut (vezi Mihlin [47 b]). Pentru a obține același rezultat pentru F_2 este suficient să ținem seama că F_2 este de două ori derivabilă în sens Gâteaux pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, că avem inegalitatea (5.1.7.30) și, deci, putem aplica teorema 5.1.7.5.

Observație. În același mod se putea obține rezultatul pentru F_1, căci F_1 are gradient ce posedă derivată în sens Gâteaux pozitivă pe $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$. Mihlin obține acest rezultat într-un mod diferit, utilizînd o teoremă a lui Kazimirov [47 b].

TEOREMA 5.1.7.7. *Funcționala* (5.1.7.1) *este coercivă pe* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

Demonstrație. Este suficient să remarcăm că

$$F(u) \geqslant F_1(u)$$

și că [47 b]

$$\lim_{\|u\| \to \infty} F_1(u) = \infty.$$

Din teoremele 5.1.7.1, 5.1.7.4, 5.1.7.6, 5.1.7.7, 2.1.1 rezultă

TEOREMA 5.1.7.9. *În ipotezele* 1)—8), *funcționala* (5.1.7.1) *are un minim absolut pe* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ *care se atinge într-un punct unic. Dacă* u_0 *este acest punct, orice șir minimizant al funcționalei* (5.1.7.1) *pe* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ *converge slab la* u_0 *în* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

Dacă $p = 2$, rezultatele teoremei 5.1.7.9 pot fi întărite astfel:

TEOREMA 5.1.7.10. *Fie* u_0 *punctul de minim absolut al funcționalei* (5.1.7.1) *pe* $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ *și fie* u_n *un șir minimizant. Atunci* u_n *converge tare la* u_0 *în norma lui* $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ *iar derivatele de ordinul* l *ale lui* $f(u_n)$ *converg tare la derivatele corespunzătoare ale lui* $f(u_0)$ *în* $L_2(\Omega)$ *(*f *fiind aplicația de scufundare a lui* $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ *în* $\underline{W}_2^{(l)}\Omega$)).

Demonstrație. Începem prin a observa că din (5.1.7.1) rezultă

$$F(u) + F(v) - 2F\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left[\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] + \left[F_2(u) + F_2(v) - 2F_2\left(\frac{u+v}{2}\right)\right].$$

Dar

$$\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left[\Phi(u) - \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] - \left[\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) - \Phi(v)\right] =$$

$$= \int_0^1 \left\langle \Phi'\left(v + \frac{u-v}{2} + t\frac{u-v}{2}\right) - \Phi'\left(v + t\frac{u-v}{2}\right), \frac{u-v}{2} \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \Phi''\left(v + (t+\tau)\frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2} \right\rangle dt\, d\tau$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, şi ţinînd seama de (5.1.7.30), rezultă

$$F_2(u) + F_2(v) - 2F_2\left(\frac{u+v}{2}\right) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left\langle F_2''\left(v + (t+\tau)\frac{u-v}{2}\right)\cdot\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right\rangle dt\, d\tau = 2\int_\Omega \tau_1\left(\frac{u-v}{2}\right) d\Omega$$

În [47b] Mihlin arată că pentru orice $u,\ h \in \overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, avem

$$\langle \Phi''(u)\cdot h, h\rangle \geqslant c^2 \| h \|^2_{\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)}$$

astfel că, dacă punem

$$\rho(u, v) = \left[F(u) + F(v) - 2F\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]^{1/2}$$

avem

$$\rho(u, v) \geqslant \frac{c}{2} \| u - v \|_{\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)}.$$

Demonstraţia urmează acum ca în [47 b] dar numai pînă la un punct. Fie u_n un şir minimizant pentru funcţionala (5.1.7.1) pe $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$. Avem

$$\rho(u_m,\ u_n) \leqslant [F(u_m) + F(u_n) - 2d]^{1/2}$$

căci

$$F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) \geqslant \inf_{u \in \overline{W}_2^{(l)}(\Omega)} F(u).$$

Fie $\varepsilon > 0$. Dacă m şi n sînt luaţi suficient de mari,

$$F(u_m) < d + \varepsilon, \qquad F(u_n) < d + \varepsilon$$

astfel că în definitiv avem

$$\rho(u_m,\ u_n) < \sqrt{2\varepsilon},$$

care arată că

$$\lim_{m,\ n \to \infty} \rho(u_m,\ u_n) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama că

$$\rho(u_m, u_n) \geqslant \frac{c}{2} \| u_m - u_n \|_{\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)}$$

rezultă

$$\| u_m - u_n \|_{\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)} \to 0, \ m, n \to \infty$$

și deci șirul minimizant u_n converge în $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ la o limită pe care o vom nota cu u_0. Această limită nu depinde de șirul minimizant ales, căci dacă v_n este de asemenea un șir minimizant, atunci șirul

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n, \cdots$$

este de asemenea un șir minimizant, deci după raționamentul anterior are limită în $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, iar u_n și v_n, ca subșiruri convergente ale lui, au aceeași limită.

Din faptul că u_n converge la u_0 în $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, ținînd seama de (5.1.7.1) în care $\widetilde{V} = \overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ iar $X = \underline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, rezultă că $f(u_n)$ are limită în $\underline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ (deci în $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$) pe $f(u_0)$. Dar se știe că dacă $f(u_n)$ converge tare la $f(u_0)$ în $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, atunci derivatele de ordinul l ale lui $f(u_n)$ converg tare în $L_2(\Omega)$ la derivatele corespunzătoare ale lui $f(u_0)$ (Acest rezultat este un rezultat intermediar ce se obține pe parcursul demonstrației completitudinii spațiului lui Sobolev $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$).

Dacă în plus $l = 1$, atunci din teoremele de scufundare (pentru acest caz particular teorema este cunoscută în literatură sub numele de teorema lui Rellich [51]) rezultă, cum se știe, că aplicația identică considerată ca aplicație de scufundare naturală a lui $\overline{W}_2^{(1)}(\Omega)$ în $L_2(\Omega)$ este complet continuă și deci, din $\| f(u_n) - f(u_0) \|_{\overline{W}_2^{(1)}(\Omega)} \to 0, \ n \to \infty$, rezultă $f(u_n) \to f(u_0)$ în $L_2(\Omega)$.

TEOREMA 5.1.7.11. *Fie că funcția materială g a teoriei Hencky-Nadai verifică ipotezele* 2), 3), 4) *formulate la începutul acestui subparagraf. Dacă luăm :*

a) *în loc de* $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ *pe* $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$;

b) $\Phi(\Omega) = \mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$;

c) $$\tau(\mathbf{u}) = \frac{4}{3} \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{4}{3} \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u}) = \Gamma(\mathbf{u})$$

$$\tau_1(\mathbf{u}) = \frac{9k}{2} \varepsilon^2(\mathbf{u}) = \frac{9k}{2} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\varepsilon_{ii}(\mathbf{u})}{3} \right)^2,$$

atunci sînt satisfăcute și ipotezele 6) *și* 8) *formulate la începutul acestui subparagraf pentru orice* $u \in \mathbf{\Phi}^{(2)}(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Ipoteza 6) este verificată.

Să dovedim așadar că pe mulțimea $\Phi^{(2)}(\Omega)$, norma din $W_2^{(1)}(\Omega)$ este echivalentă cu

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u})\right] d\Omega\Big\}^{1/2}.$$

Fie $\mathbf{u} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$. Avem

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega [u_i^2 + (\operatorname{grad} u_i)^2]\, d\Omega.$$

Utilizînd inegalitatea lui Friedrichs, se obține

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqslant (K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_{i,j}^2\, d\Omega = (K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\varepsilon_{ij}^2(\mathbf{u}) + \omega_{ij}^2(\mathbf{u}))\, d\Omega =$$

$$= (K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (2\bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u}) - 3\varepsilon^2(\mathbf{u}))\, d\Omega \leqslant 2(K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u})\, d\Omega =$$

$$= 3\,\frac{K+1}{2}\,\|\mathbf{u}\|^2_{\bar{W}_2^{(1)}(\Omega)}$$

unde am ținut de asemenea cont de (5.1.1.41), (5.1.1.6), (5.1.7.8). Pe de altă parte,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i^2\, d\Omega + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_{i,j}^2\, d\Omega \geqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_{i,j}^2\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\varepsilon_{ij}^2(\mathbf{u}) + \omega_{ij}^2(\mathbf{u}))\, d\Omega \geqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{u})\, d\Omega = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u}) + 3\varepsilon^2(\mathbf{u}) d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u})\, d\Omega = \frac{3}{4}\,\|\mathbf{u}\|_{\bar{W}_2^{(1)}(\Omega)}.$$

Ipoteza 8) este verificată.

Într-adevăr, din egalitatea

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{u})\, d\Omega - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{u})\, d\Omega - 9 \int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{u})\, d\Omega = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

pe care am stabilit-o atunci cînd am dovedit că operatorul teoriei Hencky-Nadai satisface condițiile teoremei variaționale a lui Langenbach, rezultă

$$\int_\Omega \varepsilon^2(u)\,d\Omega = \frac{1}{6}\left[\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(u)\,d\Omega - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(u)\,d\Omega\right] \leqslant \frac{1}{6}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(u)\,d\Omega.$$

Așadar, ipoteza 8) este satisfăcută pentru valoarea $\frac{9k}{16}$ a constantei γ.

§ 5.2. Realizarea numerică a metodei variaționale pentru funcționala teoriei Hencky-Nadai [24 d], [24 g]

În acest paragraf vom da o metodă efectivă de construire a unui șir minimizant pentru funcționala teoriei Hencky-Nadai. Metoda este aplicabilă și în cazul altor probleme care, datorită formulării variaționale furnizată de teorema lui Langenbach, conduc la găsirea minimului unor funcționale, ce sînt cazuri particulare ale funcționalei teoriei Hencky-Nadai, pe mulțimi de funcții suficient de regulate și care satisfac condiții liniare și omogene la frontieră (a se vedea cazul funcționalei torsiunii de exemplu). Construcția șirului minimizant pentru funcționala teoriei Hencky-Nadai va fi făcută cu o metodă de tip Ritz.

După cum se știe, aplicarea metodei lui Ritz pentru construirea șirului minimizant al funcționalelor pătratice asociate problemelor la limită pentru operatori liniari și pozitiv definiți este fundată pe rezultatele lui Friedrichs. După cum am văzut, însă, funcționala teoriei Hencky-Nadai nu este o funcțională pătratică pe mulțimea funcțiilor admisibile ale primei probleme fundamentale pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai. Faptul că este strict convexă și că gradientul ei are diferențială în sens Gâteaux pozitiv definită pe această mulțime, va permite însă adaptarea unei metode de tip Ritz, care conservă ideile esențiale ale metodei corespunzătoare cazului operatorilor liniari și pozitiv definiți pe spații hilbertiene.

Vom începe de aceea prin a expune într-o formă adaptată după [47a] ideile esențiale ale aplicării metodei Ritz în acest caz particular.

5.2.1. Metoda Ritz pentru operatori liniari și pozitiv definiți pe spații hilbertiene

Fie H un spațiu hilbertian complex și $\mathcal{D}(A) \subset H$, un subspațiu al lui H.

DEFINIȚIA 5.2.1.1. Operatorul liniar A definit de la $\mathcal{D}(A)$ în H se zice simetric pe $\mathcal{D}(A)$ dacă:

1) $\mathcal{D}(A)$ este un subspațiu al lui H dens în H;

2) $\langle Au, v\rangle_H = \langle u, Av\rangle_H$ oricare ar fi $u, v \in \mathcal{D}(A)$.

LEMA 5.1.2.1. *Dacă A este simetric, atunci $\langle Au, u\rangle_H$ este real oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(A)$ și reciproc.*

Demonstrație. Dacă A este simetric, atunci, oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(A)$, avem

$$\langle Au, u\rangle_H = \langle u, Au\rangle_H = \overline{\langle Au, u\rangle_H}$$

deci $\langle Au, u\rangle_H$ este real.

Reciproc, fie că pentru orice $u \in \mathcal{D}(A)$, $\langle Au, u\rangle_H$ este real. Să demonstrăm că, atunci, A este simetric pe $\mathcal{D}(A)$.

Fie u și v arbitrare în $\mathcal{D}(A)$. Avem

$$\langle A(u+v), u+v\rangle_H - \langle A(u-v), u-v\rangle_H =$$

$$= 2\langle Au, v\rangle_H + 2\langle Av, u\rangle_H \qquad (5.2.1.1)$$

de unde, schimbînd pe v în iv,

$$\langle A(u+iv), u+iv\rangle_H - \langle A(u-iv), u-iv\rangle_H =$$

$$= 2\langle Au, iv\rangle_H + 2\langle Aiv, u\rangle_H =$$

$$= 2i\langle Av, u\rangle_H - 2i\langle Au, v\rangle_H$$

sau încă

$$i\langle A(u+iv), u+iv\rangle_H - i\langle A(u-iv), u-iv\rangle_H =$$

$$= 2\langle Au, v\rangle_H - 2\langle Av, u\rangle_H. \qquad (5.2.1.2)$$

Din (5.2.1.1) și (5.2.2.1.2) rezultă

$$4\langle Au, v\rangle_H = \langle A(u+v), u+v\rangle_H - \langle A(u-v), u-v\rangle_H +$$

$$+ i\langle A(u+iv), u+iv\rangle_H - i\langle A(u-iv, u-iv\rangle_H. \qquad (5.2.1.3)$$

Cu un raționament analog, dar schimbînd rolurile lui u și v, se obține

$$4\langle Av, u\rangle = \langle A(u+v), u+v\rangle_H - \langle A(u-v), (u-v\rangle_H +$$

$$+ i\langle A(u-iv), u-iv\rangle_H - i\langle A(u+iv), u+iv\rangle_H. \qquad (5.2.1.4)$$

Prin conjugare, și ținînd seama că prin ipoteză $\langle Au, u\rangle_H$ este real oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(A)$, din (5.2.1.4) rezultă

$$4\overline{\langle Av, u\rangle_H} = \langle A(u+v), u+v\rangle_H - \langle A(u-v), u-v\rangle_H -$$

$$- i\langle A(u-iv), u-iv\rangle_H + i\langle A(u+iv), u+iv\rangle_H. \qquad (5.2.1.5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (5.2.1.3) și (5.2.1.5) rezultă

$$\langle Au, v\rangle_H = \overline{\langle Av, u\rangle}_H = \langle u, Av\rangle_H.$$

DEFINIȚIA 5.2.1.2. Fie A un operator liniar definit de la un subspațiu $\mathcal{D}(A)$ dens în H cu valori în H.

Operatorul A se zice *pozitiv* dacă pentru orice $u \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle Au, u\rangle_H \geqslant 0. \tag{5.2.1.5}$$

Dacă în (5.2.1.5) egalitatea are loc numai pentru $u = 0$, A se zice strict pozitiv pe $\mathcal{D}(A)$.

Evident, din lema 5.2.1.1 rezultă că orice operator pozitiv este simetric.

LEMA 5.2.1.2. *Dacă A este strict pozitiv și ecuația*

$$Au = f,\ f \in H \tag{5.2.1.6}$$

are soluție, această soluție este unică.

Demonstrație. Fie că ar exista două soluții distincte $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ ale ecuației (5.2.1.6).

Atunci, pe de-o parte

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle_H = 0 \tag{5.2.1.7}$$

căci $Au_1 = Au_2 = f$, iar pe de altă parte

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle_H = \langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle_H > 0 \tag{5.2.1.8}$$

căci $u_1 \neq u_2$ și A este presupus strict pozitiv pe $\mathcal{D}(A)$.

TEOREMA 5.2.1.1. *Fie H un spațiu hilbertian complex, $\mathcal{D}(A)$ un subspațiu dens al lui H și $A : \mathcal{D}(A) \to H$ un operator liniar și strict pozitiv pe $\mathcal{D}(A)$. Fie $f \in H$.*

În aceste condiții :

1°) *dacă ecuația*

$$Au = f,\ f \in H, \tag{5.2.1.9}$$

are soluție, această soluție este unică și realizează pe $\mathcal{D}(A)$ minimul funcționalei

$$\mathcal{F}(u) = \langle Au, u\rangle_H - \langle u, f\rangle_H - \langle f, u\rangle_H =$$

$$= \langle Au, u\rangle_H - 2\,\mathrm{Re}\,\langle u, f\rangle_H; \tag{5.2.1.10}$$

2) *reciproc, dacă există $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ care realizează pe $\mathcal{D}(A)$ minimul funcționalei* (5.2.1.10), *u_0 este soluție a ecuației* (5.2.1.9) (*și după prima parte a teoremei, unica soluție a acestei ecuații*).

Scanned with OKEN Scanner

Înainte de a trece la demonstrație să observăm că teorema 5.2.1.1 este corespondenta pentru cazul complex a teoremei 2.3.2 corespunzătoare spațiilor hilbertiene reale. Analiza demonstrației lemei 5.2.1.1 arată însă că în cazul spațiilor hilbertiene reale, presupunerea $\langle Au, u\rangle_H > 0$ pentru orice $u \in \mathcal{D}(A)$, $u \neq \theta_H$ nu atrage simetria operatorului A. Acesta este motivul pentru care în teorema 2.3.2, proprietatea de simetrie a operatorului trebuie presupusă independent de stricta lui pozitivitate.

Demonstrația teoremei 5.2.1.1. 1) Fie că există $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ astfel încît $Au_0 = f$. Că u_0 este unicul element din $\mathcal{D}(A)$ cu această proprietate rezultă din lema 5.2.1.2.

Dar, dacă $Au_0 = f$, atunci, utilizînd simetria operatorului A, avem

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &= \langle Au, u\rangle_H - \langle u, Au_0\rangle_H - \langle Au_0, u\rangle_H = \\ &= \langle Au - Au_0, u - u_0\rangle_H - \langle Au_0, u_0\rangle_H = \\ &= \langle A(u - u_0), u - u_0\rangle_H - \langle Au_0, u_0\rangle_H .\end{aligned} \tag{5.2.1.11}$$

Din (5.2.1.11), ținînd seama că A este strict pozitiv pe $\mathcal{D}(A)$, rezultă că minimul funcționalei $\mathcal{F}$ pe $\mathcal{D}(A)$ se realizează pentru $u = u_0$ și este

$$\min_{u \in \mathcal{D}(A)} \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_0) = -\langle Au_0, u_0\rangle_H . \tag{5.2.1.12}$$

2) Fie că există $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ care realizează pe $\mathcal{D}(A)$ minimul funcționalei (5.2.1.10).

Să observăm mai întîi că dacă există un asemenea punct $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, el este unicul punct care realizează minimul funcționalei (5.2.1.10) pe $\mathcal{D}(A)$. Pentru a dovedi aceasta este suficient să dovedim că funcționala (5.2.1.11) este strict convexă pe $\mathcal{D}(A)$ (a se vedea demonstrația teoremei 2.1.1).

Funcționala $\mathcal{F}$ poate fi scrisă în orice punct $u \in \mathcal{D}(A)$ sub forma

$$\mathcal{F}(u) = \Phi(u) + lu, \tag{5.2.1.13}$$

unde

$$\Phi(u) = \langle Au, u\rangle_H \tag{5.2.1.14}$$

iar lu este o funcțională definită de

$$lu = -\langle f, u\rangle_H - \langle u, f\rangle_H . \tag{5.2.1.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (5.2.1.13) rezultă

$$\mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v) - 2\mathcal{F}\left(\frac{u+v}{2}\right) = \Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\langle A(u-v),\ u-v\rangle_H$$

din care, ținînd seama că A este strict pozitiv pe $\mathcal{D}(A)$, rezultă că $\mathcal{F}$ este strict convexă pe $\mathcal{D}(A)$.

Așadar, dacă $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ realizează pe $\mathcal{D}(A)$ minimul funcționalei (5.2.1.10), u_0 este unicul punct din $\mathcal{D}(A)$ cu această proprietate și deci, pentru orice $u \in \mathcal{D}(A)$, $u \neq u_0$, avem

$$\mathcal{F}(u) > \mathcal{F}(u_0). \tag{5.2.1.16}$$

Fie $t \in [-a, a]$, $a > 0$ și v arbitrar în $\mathcal{D}(A)$ și fie funcția reală definită pe $[-a, a]$ după cum urmează:

$$t \in [-a, a],\ t \overset{\varphi}{\to} \varphi(t) = \mathcal{F}(u_0 + tv). \tag{5.2.1.17}$$

Ținînd seama de (5.2.1.16), rezultă că pentru orice $t \in [-a, a]$, $t \neq 0$, avem

$$\varphi(t) = \mathcal{F}(u_0 + tv) > \mathcal{F}(u_0) = \varphi(0)$$

deci că $t = 0$ este punct de minim absolut al funcției φ pe $[-a, a]$. Atunci, în mod necesar, avem

$$\varphi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(u_0 + tv)\Big|_{t=0} = 2\,\mathrm{Re}\,\langle Au_0 - f,\ v\rangle_H = 0$$

deci

$$\mathrm{Re}\,\langle Au_0 - f,\ v\rangle_H = 0. \tag{5.2.1.18}$$

Din (5.2.1.18), schimbînd pe v în iv, rezultă

$$\mathrm{Im}\,\langle Au_0 - f,\ v\rangle_H = 0. \tag{5.2.1.19}$$

Din (5.2.1.18) și (5.2.1.19) rezultă

$$\langle Au_0 - f, v\rangle_H = 0,$$

și cum v este un element arbitrar al lui $\mathcal{D}(A)$ care este dens în H, de aici rezultă

$$Au_0 = f.$$

După cum am atras atenţia şi în comentariul privind teorema variaţională a lui Langenbach, teorema variaţională 5.2.1.1 devine efectivă pentru rezolvarea ecuaţiei $Au_1 = f$, dacă se pot formula condiţii suficiente care să asigure existenţa unui punct de minim pe $\mathcal{D}(A)$ pentru funcţionala (5.2.1.10). Atunci, acest punct este după teorema 5.2.1.1 soluţia ecuaţiei $Au_0 = f$ şi problema rezolvării acestei ecuaţii se poate înlocui cu aceea a găsirii punctului de minim al funcţionalei (5.2.1.10) pe $\mathcal{D}(A)$, existenţa acestui punct fiind de-acum dovedită.

A. Cazul operatorilor liniari şi pozitiv definiţi

TEOREMA 5.2.1.2. *Fie că în teorema* 5.2.1.1, *condiţia că* A *este strict pozitiv pe* $\mathcal{D}(A)$ ($\langle Au, u\rangle_H > 0$, $u \neq \theta_H$), *se înlocuieşte cu condiţia mai tare*

$$\langle Au, u\rangle_H \geqslant \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad u \in \mathcal{D}(A), \quad \gamma^2 = \text{const.} > 0 \qquad (5.2.1.19')$$

Atunci:

1°. *funcţionala* (5.2.1.10) *este mărginită inferior pe* $\mathcal{D}(A)$;

2°. *funcţionala* (5.2.1.10) *este strict convexă pe* $\mathcal{D}(A)$;

3°. *orice şir minimizant al funcţionalei* (5.2.1.10) *pe* $\mathcal{D}(A)$ *are limită în* H;

4° *toate şirurile minimizante pe* $D(A)$ *ale funcţionalei* (5.2.1.10) *au aceeaşi limită în* H.

(După cum se vede, în acest caz, teorema 5.2.1.2 furnizează existenţa şi unicitatea soluţiei generalizate în sens Sobolev pentru ecuaţia $Au = f$).

Observaţie. În cazul spaţiilor hilbertiene reale, teorema 5.2.1.2 rezultă direct din teorema variaţională a lui Langenbach făcînd în această teoremă particularizarea că P este liniar. În cazul în care H este complex, demonstraţia se face direct.

Demonstraţia teoremei 5.2.1.2. Pentru a demonstra punctul 1° al teoremei, să observăm că avem

$$\mathcal{F}(u) = \langle Au, u\rangle_H - 2\mathrm{Re}\,\langle f, u\rangle_H \geqslant \gamma^2 \|u\|_H^2 - 2|\langle f, u\rangle_H| \geqslant$$

$$\geqslant \gamma^2\|u\|_H^2 - 2\|f\|_H\|u\|_H = \left(\gamma\|u\|_H - \frac{1}{\gamma}\|f\|_H\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{\gamma^2}\|f\|_H^2 \geqslant -\frac{1}{\gamma^2}\|f\|_H^2,$$

care arată că, într-adevăr, $\mathcal{F}$ este mărginită inferior pe $\mathcal{D}(A)$. Pentru a demonstra punctul 2° să observăm că (a se vedea demonstraţia punctului 2° al teoremei 5.2.1.1):

$$\mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v) - 2\mathcal{F}\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\langle A(u-v), u-v\rangle_H, \quad u, v \in \mathcal{D}(A),$$

din care, ținînd seama că A este pozitiv definit pe $\mathcal{D}(A)$, rezultă

$$\mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v) - 2\mathcal{F}\left(\frac{u+v}{2}\right) \geqslant \frac{\gamma^2}{2}\|u - v\|_H^2, \; u, \; v \in \mathcal{D}(A) \qquad (5.2.1.20)$$

care probează stricta convexitate a lui $\mathcal{F}$ pe $\mathcal{D}(A)$.

Pentru punctele 3° și 4° ale teoremei 5.2.1.2, demonstrația este aceeași ca pentru punctele corespunzătoare ale teoremei 2.3.3.

B. Spațiul H_A (Spațiul energetic al operatorului A).

Să considerăm pe $\mathcal{D}(A)$ produsul scalar:

$$u, v \in \mathcal{D}(A), \; \langle u, v\rangle_{H_A} = \langle Au, v\rangle_H, \qquad (5.2.1.21)$$

și fie H_A completatul lui $\mathcal{D}(A)$ în norma generată de (5.2.1.21):

$$\|u\|_{H_A}^2 = \langle u, u\rangle_{H_A} = \langle Au, u\rangle_H. \qquad (5.2.1.22)$$

Din (5.2.1.22), ținînd seama de (5.2.1.19), rezultă

$$\|u\|_{H_A}^2 \geqslant \gamma^2 \|u\|_H^2,$$

adică

$$\|u\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma}\|u\|_{H_A}. \qquad (5.2.1.23)$$

TEOREMA 5.2.1.3. *Spațiul H_A este scufundat în H ($H_A \subset H$) cu o injecție continuă.*

Vom defini aplicația de scufundare

$$\varphi : H_A \to H$$

după cum urmează:

oricare ar fi $u \in H_A$, există $u_n \in \mathcal{D}(A)$, $n \in N$ astfel încît $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$, $n \to \infty$ (notația $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$, $n \to \infty$, însemnînd în tot ceea ce urmează că $\|u_n - u\|_{H_A} \to 0$, $n \to \infty$) deci astfel încît $\|u_n - u_m\|_{H_A} \to 0$ cu $n, m \to \infty$.

Ținînd seama de (5.2.1.23), aceasta atrage $\|u_n - u_m\|_H \to 0$ cu $n, m \to \infty$ deci că u_n este șir Cauchy în norma lui H, deci există $u_0 \in H$ astfel încît $u_n \xrightarrow{\|\ \|_H} u_0$ cu $n \to \infty$. Vom pune $\varphi(u) = u_0$.

Pentru a dovedi că definiţia este corect pusă, vom arăta că valoarea lui φ în punctul u nu depinde de alegerea şirului u_n din $\mathcal{D}(A)$ care converge la u în norma lui H_A.

Fie, într-adevăr, u_n' un şir distinct de u_n, $u_n' \in \mathcal{D}(A)$, cu proprietatea că $u_n' \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$, $n \to \infty$. Conform raţionamentului anterior, u_n' are limită în H, fie ea u_0'.

Vom dovedi că $u_0' = u_0$.

Cum pentru orice $n \in N$, u_n şi u_n' sînt elemente din $\mathcal{D}(A)$, din (5.2.1.23) rezultă

$$\|u_n - u_n'\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma}\|u_n - u_n'\|_{H_A}.$$

Cum în H_A, u_n şi u_n' au aceeaşi limită, din această ultimă inegalitate rezultă că u_n şi u_n' au aceeaşi limită şi în H, deci $u_0 = u_0'$.

Să observăm că pe $\mathcal{D}(A)$, φ este aplicaţia identică.

Fie, într-adevăr, $u \in \mathcal{D}(A)$. Conform celor de mai sus, $\varphi(u)$ este limita în H a oricărui şir de elemente din $u_n \in \mathcal{D}(A)$ convergent la u în norma lui H_A. Or, alegînd şirul constant $u_n = u$, $n \in N$, rezultă $u_n \to u$ în H, deci $\varphi(u) = u$. Aplicaţia φ are următoarele proprietăţi:

a) φ este liniară:

$$\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2),$$

oricare ar fi $u_1, u_2 \in H_A$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}$ (cîmpul scalarilor).

Fie, într-adevăr, şirurile

$$u_n^{(1)} \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u_1,\ u_n^{(1)} \in \mathcal{D}(A),\ n \in N, \tag{5.2.1.24}$$

$$u_n^{(2)} \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u_2,\ u_n^{(2)} \in \mathcal{D}(A),\ n \in N.$$

Atunci,

$$u_n^{(1)} \xrightarrow{\|\ \|_H} \varphi(u_1),\ n \to \infty \tag{5.2.1.25}$$

$$u_n^{(2)} \xrightarrow{\|\ \|_H} \varphi(u_2),\ n \to \infty$$

Cum $\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$ înseamnă limita în H a oricărui şir de elemente din $\mathcal{D}(A)$ convergent în norma lui H la $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, este suficient să consi-

derăm limita în H a şirului $\alpha_1 u_n^{(1)} + \alpha_2 u_n^{(2)}$, care, după (5.2.1.24), converge la $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ în norma lui H_A. Dar, din (5.2.1.25) rezultă că

$$\alpha_1 u_n^{(1)} + \alpha_2 u_n^{(2)} \xrightarrow{\|\ \|_H} \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2). \tag{5.2.1.26}$$

Pe de altă parte, cum

$$\alpha_1 u_n^{(1)} + \alpha_2 u_n^{(2)} \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ n \to \infty,$$

avem

$$\alpha_1 u_n^{(1)} + \alpha_2 u_n^{(2)} \xrightarrow{\|\ \|_H} \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \tag{5.2.1.27}$$

Din (5.2.1.26) şi (5.2.1.27) rezultă

$$\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2).$$

b) φ este injecţie.

Fie, prin absurd, că ar exista $u_1, u_2 \in H_A$, $u_1 \neq u_2$ dar pentru care $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$ în H.

Vom dovedi că aceasta atrage că

$$u = u_1 - u_2 = \theta_{H_A},$$

ceea ce contrazice presupunerea $u_1 \neq u_2$ în H_A.

Fie, într-adevăr, $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u = u_1 - u_2$. Atunci,

$$u_n \xrightarrow{\|\ \|_H} \varphi(u) = \varphi(u_1 - u_2) = \varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \theta_H$$

Cu atît mai mult, $u_n \xrightarrow{\text{slab}} \theta_H$ deci $\langle u_n, w\rangle_H \to 0$, $n \to \infty$ oricare ar fi $w \in H$. Să considerăm toate punctele din H de forma Av cu $v \in \mathcal{D}(A)$. Conform celor de mai sus, avem

$$\langle u_n, Av\rangle_H \to 0 \text{ cu } n \to \infty. \tag{5.2.1.28}$$

Ţinînd seama de (5.2.1.21), (5.2.1.28) se scrie

$$\langle u_n, v\rangle_{H_A} \to 0,\ n \to \infty, \tag{5.2.1.29}$$

oricare ar fi $v \in \mathcal{D}(A)$. Cum $\mathcal{D}(A)$ este dens în H_A, aceasta atrage $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} \theta_{H_A}$, $n \to \infty$. Pe de altă parte, $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$, $n \to \infty$ deci $u = \theta_{H_A}$.

c) φ este continuă.

Pentru a dovedi această proprietate a lui φ, vom dovedi mai întîi că inegalitatea (5.2.1.23) se poate extinde de la $\mathcal{D}(A) \subset H_A$ la tot H_A, în sensul următor: oricare ar fi $u \in H_A$, avem

$$\|\varphi(u)\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma}\|u\|_{H_A} \tag{5.2.1.30}$$

Fie, într-adevăr, $u \in H_A$ şi $u_n \in \mathcal{D}(A)$, $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$. Atunci,

$$\|u_n\|_{H_A} \to \|u\|_{H_A}, \quad n \to \infty \tag{5.2.1.31}$$

Cum însă, din $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$, $u_n \in \mathcal{D}(A)$, rezultă $u_n \xrightarrow{\|\ \|_H} \varphi(u)$, avem şi

$$\|u_n\|_H \to \|\varphi(u)\|_H, \quad n \to \infty. \tag{5.2.1.32}$$

Dar $u_n \in \mathcal{D}(A)$, deci pentru u_n este adevărată (5.2.1.23):

$$\|u_n\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma}\|u_n\|_{H_A} \tag{5.2.1.33}$$

Trecînd la limită în (5.2.1.33) şi ţinînd seama de (5.2.1.31), (5.2.1.32), rezultă (5.2.1.30).

Din (5.2.1.30) rezultă imediat continuitatea lui φ pe H_A. Fie, într-adevăr, $u \in H_A$ şi $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$, $n \to \infty$. Ţinînd seama de (5.2.1.30) şi de faptul că φ este liniară, rezultă

$$\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|_H = \|\varphi(u_n - u)\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma}\|u_n - u\|_{H_A},$$

din care se vede imediat că dacă $\|u_n - u\|_{H_A} \to 0$ cu $n \to \infty$, atunci $\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|_H \to 0$ cu $n \to \infty$.

C. Extinderea funcţionalei (5.2.1.10)

Fie $\widetilde{\mathcal{F}}$ următoarea funcţională definită pe H_A:

$$u \in H_A,\ u \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{F}}} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \|u\|^2_{H_A} - \langle \varphi(u), f\rangle_u - \langle f, \varphi(u)\rangle_H. \tag{5.2.1.34}$$

Ținînd seama că din (5.2.1.21) rezultă că pentru $u \in \mathcal{D}(A)$, $\|u\|^2_{H_A} = \langle u, u\rangle_{H_A} = \langle Au, u\rangle_H$ iar φ este pe $\mathcal{D}(A)$ aplicația identică, pentru orice $u \in \mathcal{D}(A)$, avem

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \langle Au, u\rangle_H - \langle u, f\rangle_H - \langle f, u\rangle_H = \mathcal{F}(u),$$

deci $\widetilde{\mathcal{F}}$ extinde pe $\mathcal{F}$ de la $\mathcal{D}(A) \subset H_A$ la H_A. Fie $\mathcal{F}_1$ funcționala liniară definită pe H_A după cum urmează:

$$u \in H_A,\ u \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathcal{F}_1(u) = \langle \varphi(u), f\rangle_H. \tag{5.2.1.35}$$

Ținînd seama de (5.2.1.30), avem

$$|\mathcal{F}_1(u)| = |\langle \varphi(u), f\rangle_H| \leqslant \|\varphi(u)\|_H \|f\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma}\|f\|_H \|u\|_{H_A},$$

care arată că funcționala liniară $\mathcal{F}_1$ este și mărginită pe H_A și avem

$$\|\mathcal{F}_1\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\|f\|_H. \tag{5.2.1.36}$$

Conform teoremei lui Riesz, există u_0 (unic) în H_A astfel încît $\mathcal{F}_1$ se reprezintă astfel

$$\mathcal{F}_1(u) = \langle u, u_0\rangle_{H_A}, \tag{5.2.1.37}$$

și

$$\|u_0\|_{H_A} = \|\mathcal{F}_1\|.$$

Ținînd seama în (5.2.1.34) de (5.2.1.37), rezultă că pentru orice $u \in H_A$, avem

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \langle u, u\rangle_{H_A} - \langle u, u_0\rangle_{H_A} - \langle u_0, u\rangle_{H_A} = \tag{5.2.1.37'}$$

$$= \langle u - u_0, u - u_0\rangle_{H_A} - \langle u_0, u_0\rangle_{H_A} = \|u - u_0\|^2_{H_A} - \|u_0\|^2_{H_A}.$$

Din (5.2.1.38) rezultă evident că

$$\min_{u \in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) = -\|u_0\|^2_{H_A}. \tag{5.2.1.37''}$$

Fie $G : H \to H_A$ operatorul care asociază fiecărui element $f \in H$ elementul u_0 obţinut aplicînd teorema lui Riesz funcţionalei $\mathcal{F}_1$, deci cu care $\mathcal{F}_1$ se scrie în orice punct $u \in H_A$ sub forma

$$\mathcal{F}_1(u) = \langle \varphi(u), f \rangle_H = \langle u, u_0 \rangle_{H_A}$$

După cum am văzut, u_0 realizează pe H_A minimul funcţionalei $\widetilde{\mathcal{F}}$. Aşadar,

$$G : H \to H_A, \quad f \in H, \quad f \overset{G}{\to} Gf = u_0 \in H_A,$$

$$\mathcal{F}_1(u) = \langle \varphi(u), f \rangle_H = \langle u, u_0 \rangle_{H_A} = \langle u, Gf \rangle_{H_A}, \quad u \in H_A \tag{5.2.1.38}$$

şi

$$u_0 = Gf$$

realizează minimul funcţionalei $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A.

Operatorul G are următoarele proprietăţi :

a) G este liniar.

Într-adevăr, oricare ar fi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}$ şi $f_1, f_2 \in H$, din (5.2.1.38) rezultă că pentru orice $u \in H_A$ avem :

$$\langle \varphi(u), \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \rangle_H = \langle u, G(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \rangle_{H_A} \tag{5.2.1.39}$$

Pe de altă parte,

$$\langle \varphi(u), \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \rangle_H = \bar{\alpha}_1 \langle \varphi(u), f_1 \rangle_H + \bar{\alpha}_2 \langle \varphi(u), f_2 \rangle_H =$$

$$= \bar{\alpha}_1 \langle u, Gf_1 \rangle_{H_A} + \bar{\alpha}_2 \langle u, Gf_2 \rangle_{H_A} = \langle u, \alpha_1 Gf_1 + \alpha_2 Gf_2 \rangle_{H_A} \tag{5.2.1.40}$$

Din (5.2.1.39) şi (5.2.1.40) rezultă

$$G(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 Gf_1 + \alpha_2 Gf_2 \tag{5.2.1.41}$$

b) G este mărginit.

Într-adevăr, făcînd în (5.2.1.38) $u = Gf$ şi ţinînd seama de (5.2.1.30), avem

$$\langle Gf, Gf \rangle_{H_A} = \|Gf\|^2_{H_A} = \langle \varphi(Gf), f \rangle_H \leqslant \|f\|_H \|\varphi(Gf)\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_H \cdot \frac{1}{\gamma} \|Gf\|_{H_A} \tag{5.2.1.42}$$

din care rezultă

$$\|Gf\|_{H_A} \leqslant \frac{1}{\gamma} \|f\|_H \tag{5.2.1.43}$$

care arată că G este mărginit și că

$$\|G\| \leqslant \frac{1}{\gamma}, \tag{5.2.1.44}$$

Vom mai stabili o inegalitate ce se va dovedi importantă în cele ce urmează.

Din (5.2.1.30) și (5.2.1.43) rezultă

$$\|\varphi(Gf)\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma} \|Gf\|_{H_A} \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \|f\|_H . \tag{5.2.1.45}$$

c) Considerat ca aplicînd H pe $G(H)$, G este inversabil. Este suficient să arătăm că

$$Gf = \theta_{H_A} \Rightarrow f = \theta_H .$$

Ținînd seama de (5.2.1.38), presupunerea $Gf = \theta_{H_A}$ atrage $\langle \varphi(u), f\rangle_H = 0$ oricare ar fi $u \in H_A$, deci cu atît mai mult $\langle \varphi(u), f\rangle_H = 0$ oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(A) \subset H_A$. Dar, pe $\mathcal{D}(A)$, φ este aplicația identică, deci, pentru orice $u \in \mathcal{D}(A)$, $\langle \varphi(u), f\rangle_H = \langle u, f\rangle_H = 0$ din care, ținînd seama că $\mathcal{D}(A)$ este dens în H, rezultă $f = \theta_H$. Operatorul $G^{-1} : G(H) \xrightarrow{pe} H$ are următoarea proprietate remarcabilă:

d) G^{-1} extinde pe A.

Fie, într-adevăr, $u_0^* \in \mathcal{D}(A)$ și $Au_0^* = f$.

Atunci, pe de-o parte putem afirma că punctul $G(Au_0^*)$ realizează pe H_A minimul funcționalei $\widetilde{\mathcal{F}}_*$,

$$\widetilde{\mathcal{F}}_*(u) = \|u\|^2_{H_A} - \langle \varphi(u), Au_0^*\rangle_H - \langle Au_0^*, \varphi(u)\rangle_H . \tag{5.2.1.46}$$

Așadar,

$$\min_{u \in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}_*(u) = \widetilde{\mathcal{F}}_*(G(Au_0^*)). \tag{5.2.1.47}$$

Funcționala (5.2.1.46) este o funcțională din clasa de funcționale definite de (5.2.1.34), anume funcționala ce se obține din (5.2.1.34) pentru $f = Au_0^*$, $u_0^* \in \mathcal{D}(A)$.

Restricția lui $\widetilde{\mathcal{F}}_*$ la $\mathcal{D}(A)$ va fi notată $\mathcal{F}_*$.

În continuare, însă, proprietăţile valabile pentru orice funcţională din clasa de funcţionale definită de (5.2.1.34), vor fi demonstrate utilizînd notaţiile $\widetilde{\mathcal{F}}$, respectiv $\mathcal{F}$ (pentru restricţia lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ la $\mathcal{D}(A)$).

Se înţelege, orice asemenea proprietate este valabilă şi pentru $\widetilde{\mathcal{F}}_*$.

Funcţionala (5.2.1.34) este strict convexă pe H_A. Într-adevăr, ţinînd seama de liniaritatea lui φ, rezultă

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) + \widetilde{\mathcal{F}}(v) - 2\mathcal{F}\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\|u - v\|^2_{H_A}$$

din care se vede imediat că $\widetilde{\mathcal{F}}$ este strict convexă pe H_A.

Punctul $G(Au_0^*) \in H_A$ fiind punct de minim pentru funcţionala (5.2.1.46) pe H_A, şi această funcţională fiind strict convexă pe H_A, rezultă că $G(Au_0^*)$ este unicul punct de minim al acestei funcţionale pe H_A.

Pe de altă parte avem, evident:

$$\min_{u\in\mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}_*(u) = \min_{u\in\mathcal{D}(A)} \mathcal{F}_*(u) = \min_{u\in\mathcal{D}(A)} [\langle Au, u\rangle_H - \langle u, Au_0^*\rangle_H - \langle Au_0^*, u\rangle_H] =$$

$$= \min_{u\in\mathcal{D}(A)} [\langle A(u-u_0^*), u-u_0^*\rangle_H - \langle Au_0^*, u_0^*\rangle_H] = -\langle Au_0^*, u_0^*\rangle =$$

$$= \widetilde{\mathcal{F}}_*(u_0^*) = \mathcal{F}_*(u_0^*).$$

Vom dovedi că:

$$\inf_{u\in\mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \inf_{u\in\mathcal{D}(A)} \mathcal{F}(u) = \inf_{u\in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0). \tag{5.2.1.48}$$

Pentru aceasta vom dovedi că:

1°) funcţionala (5.2.1.34) este continuă pe H_A.

Într-adevăr, dacă $u_0 \in H_A$ este punctul ce realizează minimul lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A, avem (a se vedea (5.2.1.38)):

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \|u - u_0\|^2_{H_A} - \|u_0\|^2_{H_A}.$$

Fie $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_A}} u$, $n \to \infty$. Atunci,

$$|\widetilde{\mathcal{F}}(u_n) - \widetilde{\mathcal{F}}(u_0)| = |\,\|u_n - u_0\|^2_{H_A} - \|u - u_0\|^2_{H_A}\,| \to 0 \text{ cu } n \to \infty.$$

2°. Fie $u_n \in H_A$ un şir minimizant al lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A, deci un şir cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{F}}(u_n) = \min_{u\in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) = -\|u_0\|^2_{H_A}. \tag{5.2.1.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

Un asemenea șir poate fi totdeauna ales din $\mathcal{D}(A)$.

Să observăm mai întîi că $\widetilde{\mathcal{F}}(u_0) = \min_{u \in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u)$ este marginea inferioară a mulțimii de numere reale $\{\widetilde{\mathcal{F}}(u) \mid u \in H_A\}$.

Într-adevăr, oricare ar fi $u \in H_A$,

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \|u - u_0\|^2_{H_A} - \|u_0\|^2_{H_A} \geqslant \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) = -\|u_0\|^2_{H_A},$$

egalitatea avînd loc numai pentru $u = u_0$.

De asemenea, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $u \in H_A$ astfel încît

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) < \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) + \varepsilon$$

adică astfel încît

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) - \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) < \varepsilon$$

adică astfel încît

$$\|u - u_0\|^2_{H_A} < \varepsilon$$

ceea ce este evident.

Un asemenea u poate fi ales chiar din $\mathcal{D}(A)$, în baza densității lui $\mathcal{D}(A)$ în H_A.

Faptul că $\widetilde{\mathcal{F}}(u_0)$ este marginea inferioară a mulțimii de numere reale $\{\widetilde{\mathcal{F}}(u) \mid u \in H_A\}$, ne asigură de existența șirurilor minimizante pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A, adică a șirurilor $u_n \in H_A$, cu proprietatea scrisă în (5.2.1.49).

Să observăm că $\mathcal{F}$, restricția lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ la $\mathcal{D}(A)$, este mărginită inferior pe $\mathcal{D}(A)$ (vezi teorema 5.2.1.2), deci mulțimea de numere reale $\{\mathcal{F}(u) \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$ posedă o margine inferioară. Dacă există însă $\tilde{u} \in \mathcal{D}(A)$, astfel încît $A\tilde{u} = f$, această margine inferioară este realizată ca valoare a lui $\mathcal{F}$ în $\tilde{u}$. Într-adevăr, atunci, oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(A)$, avem

$$\mathcal{F}(u) = \langle A(u - \tilde{u}), u - \tilde{u}\rangle_H - \langle A\tilde{u}, \tilde{u}\rangle_H = \|u - \tilde{u}\|^2_{H_A} - \|\tilde{u}\|^2_{H_A},$$

și demonstrația faptului că $\mathcal{F}(\tilde{u})$ este marginea inferioară a mulțimii de numere reale $\{\mathcal{F}(u) \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$, decurge analog cu cea făcută anterior pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Evident, avem :

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \mathcal{F}(u) = \inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) \geqslant \inf_{u \in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0). \qquad (5.2.1.50)$$

Pe de altă parte, vom dovedi că totdeauna putem alege un șir v_n de elemente din $\mathcal{D}(A)$ care să fie șir minimizant pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A. Fie, într-adevăr, $u_n \in H_A$ un șir minimizant pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A,

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u_n) \to \widetilde{\mathcal{F}}(u_0), \quad n \to \infty.$$

Oricare ar fi $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $k \in N$, există n_k astfel încît

$$|\widetilde{\mathcal{F}}(u_{n_k}) - \widetilde{\mathcal{F}}(u_0)| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{5.2.1.51}$$

În virtutea continuităţii lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A, pentru $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, există δ_k astfel încît, dacă v_k este astfel încît $\|v_k - u_{n_k}\|_{H_A} < \delta_k$, atunci

$$|\widetilde{\mathcal{F}}(v_k) - \widetilde{\mathcal{F}}(u_{n_k})| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{5.2.1.52}$$

Însă, în baza densităţii lui $\mathcal{D}(A)$ în H_A, un asemenea v_k poate fi ales totdeauna din $\mathcal{D}(A)$.

Din (5.2.1.51) şi (5.2.1.52) (cu $v_k \in \mathcal{D}(A)$), avem

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u_0) \leqslant \widetilde{\mathcal{F}}(v_k) \leqslant \frac{1}{k} + \widetilde{\mathcal{F}}(u_{n_k}) \leqslant \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) + \frac{2}{k};$$

De aici rezultă

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mathcal{F}}(v_k) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) = \min_{u\in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u)$$

deci $v_k \in \mathcal{D}(A)$, $k \in N$, este şir minimizant pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A. Dar cum $v_k \in \mathcal{D}(A)$, avem

$$\inf_{u\in\mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) \leqslant \widetilde{\mathcal{F}}(v_k).$$

de unde, prin trecere la limită cu $k \to \infty$, rezultă

$$\inf_{u\in\mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) \leqslant \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) = \inf_{u\in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u). \tag{5.2.1.53}$$

Din (5.2.1.50) şi (5.2.1.53) rezultă

$$\inf_{u\in\mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) \,(= \inf_{u\in\mathcal{D}(A)} \mathcal{F}(u)) = \inf_{u\in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0). \tag{5.2.1.54}$$

Revenind la funcţionala (5.2.1.46), pe de-o parte

$$\inf_{u\in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}_*(u) = \widetilde{\mathcal{F}}_*(G(Au_0)$$

iar pe de altă parte, ținînd cont că există $u_0^* \in \mathcal{D}(A)$, astfel încît $f = Au_0^*$,

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}_*(u) = \widetilde{\mathcal{F}}_*(u_0^*)$$

ceea ce, ținînd seama de (5.2.1.48), atrage că

$$\widetilde{\mathcal{F}}_*(G(Au_0^*)) = \widetilde{\mathcal{F}}_*(u_0^*) = \inf_{u \in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}_*(u)$$

De aici, în baza strictei convexități a lui $\mathcal{F}_*$ pe H_A, rezultă

$$u_0^* = G(Au_0^*)$$

deci

$$G^{-1}u_0^* = Au_0^*$$

care arată că pe $\mathcal{D}(A)$, G^{-1} se reduce la A.

Continuînd studiul proprietăților lui G, vom enunța:

e) G este φ-simetric, în sensul următor: oricare ar fi $u, v \in H$,

$$\langle \varphi(Gu), v \rangle_H = \langle u, \varphi(Gv) \rangle_H \qquad (5.2.1.55)$$

Pentru demonstrație, să observăm următoarele: operatorul $\varphi \circ G : H \to H$, este simetric, căci oricare ar fi $u \in H$, avem (a se vedea (5.2.1.42)):

$$\langle (\varphi \circ G)\, u, u \rangle_H = \langle \varphi\,(Gu),\ u \rangle_H = \langle Gu, Gu \rangle_{H_A} \geqslant 0,$$

ceea ce, conform lemei 5.1.2.1, atrage că $(\varphi \circ G)$ este simetric pe H, deci pentru orice $u,\ v \in H$, avem

$$\langle (\varphi \circ G)\, u, v \rangle_H = \langle u, (\varphi \circ G)\, v \rangle_H$$

adică tocmai (5.2.1.55). Din (5.2.1.45) rezultă că $\varphi \circ G$ este și mărginit.

f) $\varphi \circ G$ este autoconjugat.

Această proprietate rezultă din următoarele proprietăți ale operatorilor simetrici pe spații hilbertiene:

1) Dacă A este simetric, atunci $A \subset A^*$, adică

— $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$,

— $A^*/\mathcal{D}(A) = A$.

Demonstrația rezultă imediat din definițiile (4.3.1.1) și (5.2.1.1)

2) Dacă A este simetric și $\mathcal{D}(A) = H$, atunci $A = A^*$. Rezultă imediat ținînd cont de proprietatea 1) și de presupunerea $\mathcal{D}(A) = H$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Dacă un operator autoconjugat A mărginit şi definit pe tot H este inversabil, atunci inversul lui este de asemenea autoconjugat, mărginit sau nu (a se vedea [3]). Cum $\varphi \circ G$ este autoconjugat, rezultă după 3) că

$$(\varphi \circ G)^{-1} : \varphi(G(H)) \to H$$

este de asemenea autoconjugat, deci, oricare ar fi $u', v' \in \varphi(G(H))$,

$$\langle (\varphi \circ G)^{-1} u', v' \rangle_H = \langle u', (\varphi \circ G)^{-1} v' \rangle_H$$

sau

$$\langle G^{-1}(\varphi^{-1} u'), v' \rangle_H = \langle u', G^{-1}(\varphi^{-1} v') \rangle_H. \tag{5.2.1.56}$$

Dar, $u' \in \varphi(G(H))$, deci $u' = \varphi(u)$ cu $u \in G(H) = \mathcal{D}(G^{-1})$. Analog, $v' = \varphi(v)$ cu $v \in G(H) = \mathcal{D}(G^{-1})$, astfel că (5.2.1.56) se scrie :

$$\langle G^{-1} u, \varphi(v) \rangle_H = \langle \varphi(u), G^{-1} v \rangle_H. \tag{5.2.1.57}$$

În concluzie, A a fost extins la un operator (G^{-1}) care este φ-simetric şi a cărui mulţime a valorilor este H.

Ecuaţia

$$G^{-1} u = f$$

are, deci, soluţie oricare ar fi $f \in H$.

Să încheiem consideraţiile inspirate de funcţionala (5.2.1.34) cu următoarea teoremă :

TEOREMA 5.2.1.34. *Fie $u_0 \in H_A$, punctul care realizează minimul funcţionalei* (5.2.1.34) *pe H_A.*

Oricare ar fi $u_n \in H_A$, $n \in N$, un şir minimizant pentru funcţionala (5.2.1.34) *pe H_A,*

$$u_n \xrightarrow{\| \|_{H_A}} u_0 \tag{5.2.1.58}$$

şi

$$\varphi(u_n) \xrightarrow{\| \|_H} \varphi(u_0). \tag{5.2.1.59}$$

Demonstraţie. Fie $u_n \in H_A$, un şir minimizant pentru funcţionala (5.2.1.34) pe H_A. Atunci, din (5.2.1.37'), rezultă

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u_n) = \|u_n - u_0\|^2_{H_A} - \|u_0\|^2_{H_A}. \tag{5.2.1.60}$$

Dar, din definiţia şirului minimizant, decurge

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{\mathcal{F}}(u_n) = \min_{u \in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u_n) = - \|u_0\|^2_{H_A} \tag{5.2.1.61}$$

Din (5.2.1.60) și (5.2.1.61) rezultă

$$\|u_n - u_0\|_{H_A} \to 0 \quad \text{cu} \quad n \to \infty$$

iar din continuitatea aplicației de scufundare φ a lui H_A în H,

$$\varphi(u_n) \xrightarrow{\|\ \|_H} \varphi(u_0).$$

D. Spațiul $H_{G^{-1}}$

După cum am văzut, operatorul simetric $A : \mathcal{D}(A) \subset H_A \to H$ a fost extins la operatorul $G^{-1} : \mathcal{D}(G^{-1}) = G(H) \xrightarrow{\text{pe}} H$, care este φ-simetric pe $\mathcal{D}(G^{-1}) = G(H)$, în sensul precizat de (5.2.1.57) și care aplică $G(H)$ pe H, așadar ecuația

$$G^{-1}u = f \tag{5.2.1.62}$$

are soluție oricare ar fi $f \in H$.

Ideile esențiale ale acestei construcții de extindere aparțin lui Friedrichs (a se vedea [47 a]). În forma în care sînt expuse aici, rezultatele au fost reproduse după [24 j.].

TEOREMA 5.2.1.5. *Ecuația* (5.2.1.62) *are soluție unică.*

Demonstrație. Fie $u \in \mathcal{D}(G^{-1}) = G(H)$. Există $f \in H$, unic, astfel încît $u = Gf$.

Din (5.2.1.42) și (5.2.1.30) rezultă

$$\langle G^{-1}u, \varphi(u)\rangle_H = \langle G^{-1}(Gf), \varphi(Gf)\rangle_H = \langle f, \varphi(Gf)\rangle_H =$$

$$= \|Gf\|^2_{H_A} = \|u\|^2_{H_A} \geqslant \gamma^2 \|\varphi(u)\|^2_H .$$

Așadar, oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(G^{-1}) = G(H)$,

$$\langle G^{-1}u, \varphi(u)\rangle_H = \|u\|^2_{H_A} \geqslant \gamma^2 \|\varphi(u)\|^2_H \tag{5.2.1.63}$$

Fie acum că ecuația (5.2.1.62) ar avea două soluții distincte

$$u_1, u_2 \in \mathcal{D}(G^{-1}).$$

Atunci, pe de-o parte

$$\langle G^{-1}u_1 - G^{-1}u_2, \varphi(u_1 - u_2)\rangle_H = 0. \tag{5.2.1.64}$$

căci

$$G^{-1}u_1 = G^{-1}u_2 = f,$$

iar pe de altă parte, ținînd cont de (5.2.1.63),

$$\langle G^{-1}u_1 - G^{-1}u_2,\ \varphi(u_1 - u_2)\rangle_H = \langle G^{-1}(u_1 - u_2),\ \varphi(u_1 - u_2)\rangle_H \geqslant$$

$$\geqslant \gamma^2 \| \varphi(u_1 - u_2)\|_H^2 > 0, \tag{5.2.1.64}$$

unde am utilizat liniaritatea lui G^{-1} și a lui φ, precum și faptul că φ este injectivă.

Vom construi acum spațiul energetic al operatorului G^{-1}. Fie pe $\mathcal{D}(G^{-1}) = G(H) \subset H_A$ produsul scalar

$$\langle u, v\rangle_{H_{G^{-1}}} = \langle G^{-1}u,\ \varphi(v)\rangle_H. \tag{5.2.1.65}$$

Axiomele de produs scalar se verifică imediat.

1°. În baza liniarității lui G^{-1} avem

$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ v\rangle_{H_{G^{-1}}} = \langle G^{-1}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2),\ \varphi(v)\rangle_H =$$

$$= \alpha_1 \langle G^{-1}u_1,\ \varphi(v)\rangle_H + \alpha_2 \langle G^{-1}u_2,\ \varphi(v)\rangle_H =$$

$$= \alpha_1 \langle u_1, v\rangle_{H_{G^{-1}}} + \alpha_2 \langle u_2, v\rangle_{H_{G^{-1}}},$$

oricare ar fi $u_1, u_2, v \in \mathcal{D}(G^{-1})$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}$.

2°. În baza φ-simetriei lui G^{-1} (vezi (5.2.1.57)), avem

$$\langle u, v\rangle_{H_{G^{-1}}} = \langle G^{-1}u,\ \varphi(v)\rangle_H = \langle \varphi(u),\ G^{-1}v\rangle_H =$$

$$= \overline{\langle G^{-1}v,\ \varphi(u)\rangle_H} = \overline{\langle v,\ u\rangle_{H_{G^{-1}}}},$$

oricare ar fi $u,\ v \in \mathcal{D}(G^{-1})$.

3°. În baza lui (5.2.1.63), pentru orice $u \in \mathcal{D}(G^{-1}) = G(H) \subset H_A$, avem

$$\langle u, u\rangle_{H_{G^{-1}}} = \langle G^{-1}u,\ \varphi(u)\rangle_H = \|u\|_{H_A}^2 \tag{5.2.1.66}$$

din care rezultă că $\langle u, u\rangle_{H_{G^{-1}}} \geqslant 0$, egalitatea cu zero avînd loc numai pentru $u = \theta_{H_A}$.

Să notăm cu $H_{G^{-1}}$ completatul lui $\mathcal{D}(G^{-1})$ în norma generată de produsul scalar (5.2.1.65).

Dar, din (5.2.1.66), rezultă că

$$\|u\|_{H_{G^{-1}}} = \|u\|_{H_A} \tag{5.2.1.67}$$

oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(G^{-1})$.

Rezumînd, avem:

1) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(G^{-1})$ (am văzut că G^{-1} extinde pe A);

2) oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(G^{-1})$,

$$\|u\|_{H_{G^{-1}}} = \|u\|_{H_A}$$

3) completatul lui $\mathcal{D}(A)$ în norma $\| \ \|_{H_A}$ (care este tot una cu norma $\| \ \|_{H_{G^{-1}}}$) este H_A.

Rezultă că, completatul lui $\mathcal{D}(G^{-1})$ în norma lui $\| \ \|_{H_{G^{-1}}}$ (care este tot una cu $\| \ \|_{H_A}$) este de asemenea H_A, deci

$$H_{G^{-1}} = H_A.$$

În virtutea egalității (5.2.1.68), este evident că funcționala (5.2.1.34) poate fi scrisă sub forma următoare

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \|u\|^2_{H_{G^{-1}}} - \langle \varphi(u), f \rangle_H - \langle f, \varphi(u) \rangle_H, \ u \in H_{G^{-1}} = H_A. \tag{5.2.1.68}$$

Am demonstrat că, oricare ar fi $f \in H$, $u_0 = Gf$ realizează minimul funcționalei (5.2.1.34) (sau, ceea ce este tot același lucru, al funcționalei (5.2.1.68)) pe $H_A = H_{G^{-1}}$.

Dar, oricare ar fi $f \in H$, există $u_0^{(1)} \in \mathcal{D}(G^{-1})$, unic, astfel încît $f = G^{-1} u_0^{(1)}$, astfel că avem

$$u_0 = Gf = G(G^{-1}(u_0^{(1)})) = u_0^{(1)}.$$

În concluzie, oricare ar fi $f \in H$, ecuația $G^{-1}u = f$ admite o soluție unică u_0, care este exact punctul, unic în virtutea strictei convexități a funcționalei (5.2.1.34) pe $H_A = H_{G^{-1}}$, care realizează minimul funcționalei (5.2.1.34) (sau (5.2.1.68)) pe $H_A = H_{G^{-1}}$. Așadar, problema găsirii soluției ecuației (5.2.1.62) poate fi înlocuită cu aceea a găsirii punctului u_0 care realizează minimul funcționalei (5.2.1.34) (sau (5.2.1.68)) pe $H_A = H_{G^{-1}}$.

E. Caz particular important: forma lui u_0 în cazul în care $H_{G^{-1}}$ este separabil

Fie că $H_{G^{-1}}$ este separabil (vom vedea ulterior că pentru aceasta este suficient ca H să fie separabil).

Se ştie că dacă $H_{G^{-1}}$ este separabil, aceasta este echivalent cu faptul că $H_{G^{-1}}$ posedă un şir ortonormat complet, fie el φ_n, $n \in N$. Elementul u_0, care realizează minimul funcţionalei (5.2.1.68) pe $H_{G^{-1}}$, se scrie

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_n \rangle_{H_{G^{-1}}} \varphi_n. \tag{5.2.1.69}$$

Am demonstrat că funcţionala

$$u \in H_A, \; u \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \langle \varphi(u), f \rangle_{H_A}$$

are proprietatea (vezi (5.2.1.36)):

$$|\mathcal{F}_1(u)| \leqslant \frac{1}{\gamma} \|f\|_H \; \|u\|_{H_A}.$$

Ţinînd seama de faptul că $H_{G^{-1}} = H_A$, şi că $\|u\|_{H_{G^{-1}}} = \|u\|_{H_A}$, această ultimă inegalitate se scrie: oricare ar fi $u \in H_{G^{-1}}$,

$$|\mathcal{F}_1(u)| \leqslant \frac{1}{\gamma} \|f\|_H \; \|u\|_{H_{G^{-1}}},$$

deci funcţionala liniară $\mathcal{F}_1$ este mărginită şi pe $H_{G^{-1}}$. Conform teoremei lui Riesz, există $u_0' \in H_{G^{-1}} = H_A$, astfel încît

$$\mathcal{F}_1(u) = \langle \varphi(u), f \rangle_H = \langle u, u_0' \rangle_{H_{G^{-1}}}.$$

Dar atunci, $\widetilde{\mathcal{F}}(u)$ se scrie, evident, sub forma

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \|u - u_0'\|^2_{H_{G^{-1}}} - \|u_0'\|^2_{H_{G^{-1}}}$$

de unde se vede că u_0' realizează minimul lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_{G^{-1}} = H_A$. În virtutea strictei convexităţi a lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_{G^{-1}} = H_A$, este evident că $u_0 = u_0'$, deci

$$\mathcal{F}_1(u) = \langle \varphi(u), f \rangle_H = \langle u, u_0 \rangle_{H_{G^{-1}}}. \tag{5.2.1.70}$$

Din (5.2.1.70), pentru $u = \varphi_n$, $n \in N$, se obţine

$$\langle \varphi(\varphi_n), f \rangle_H = \langle \varphi_n, u_0 \rangle_{H_{G^{-1}}} \tag{5.2.1.71}$$

Din (5.2.1.69) şi (5.2.1.71) rezultă

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_n \rangle_{H_{G^{-1}}} \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi(\varphi_n) \rangle_H \varphi_n. \tag{5.2.1.72}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, soluţia exactă a ecuaţiei

$$G^{-1}u = f,$$

este dată de (5.2.1.72).

Dar, după cum am văzut, u_0 realizează minimul funcţionalei (5.2.1.34) pe H_A, şi orice şir minimizant al funcţionalei $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe H_A, converge la u_0 în norma lui H_A.

Am văzut, de asemenea, că se poate totdeauna alege un şir minimizant pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$ chiar din $\mathcal{D}(A)$. Fie $u_n \in \mathcal{D}(A)$, un asemenea şir. Avem

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u_n) \to d = \inf_{u \in H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \mathcal{F}(u)$$

unde am ţinut seama de (5.2.1.54).

Aşadar, u_n este în acelaşi timp şir minimizant pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $\mathcal{D}(A)$ şi, deci, u_0-limita lui în H_A, este, în virtutea definiţiei 2.3.2, soluţie generalizată a ecuaţiei

$$Au = f.$$

În concluzie, dacă $H_{G^{-1}}$ este separabil, formula (5.2.1.72) furnizează soluţia exactă a ecuaţiei $G^{-1}u = f$, care este, în acelaşi timp, soluţie generalizată a ecuaţiei $Au = f$.

Atragem atenţia că formula (5.2.1.72) nu poate fi scrisă dacă nu se cunoaşte injecţia φ de scufundare a lui H_A în H.

Numai dacă şirul ortonormat φ_n este chiar din $\mathcal{D}(A) \subset H$, ţinînd seama că pe $\mathcal{D}(A)$ aplicaţia φ este identitatea, formula (5.2.1.72) se scrie

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_H \varphi_n \qquad (5.2.1.73)$$

(a se compara cu Mihlin [47 a]).

Din (5.2.1.72) rezultă, evident, că

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi(\varphi_k) \rangle_H \varphi_k \xrightarrow{\|\ \|_{H_{G^{-1}}} = \|\ \|_{H_A}} u_0, \quad n \to \infty, \qquad (5.2.1.74)$$

iar în baza continuităţii lui φ, din (5.2.1.74) rezultă

$$\varphi(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi(\varphi_k) \rangle_H \varphi(\varphi_k) \xrightarrow{\|\ \|_H} \varphi(u_0), \quad n \to \infty. \qquad (5.2.1.74')$$

Din (5.2.1.74), în baza continuităţii funcţionalei $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_A = H_{G^{-1}}$, rezultă

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u_n) \to \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) = \inf_{u \in H_{G^{-1}} = H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u)$$

deci

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi(\varphi_k) \rangle_H \varphi_k \qquad (5.2.1.75)$$

este un şir minimizant pentru $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_A = H_{G^{-1}}$.

F. Metoda Ritz de construcţie a şirurilor minimizante pentru funcţionala (5.2.1.68)

După cum am remarcat deja, orice şir minimizant pe $H_A = H_{G^{-1}}$ al funcţionalei (5.2.1.68) converge în norma lui $H_{G^{-1}}$ la u_0, punctul care realizează minimul acestei funcţionale pe $H_{G^{-1}}$. În acelaşi timp, u_0 este soluţia exactă a ecuaţiei $G^{-1}u = f$ şi soluţia generalizată în sens Sobolev a ecuaţiei $Au = f$. Rezultă din cele de mai sus că o metodă de construire a unui şir minimizant pentru funcţionala (5.2.1.68) înseamnă o metodă de construire aproximativă a soluţiei exacte a ecuaţiei $G^{-1}u = f$, în acelaşi timp soluţie în sens Sobolev a ecuaţiei $Au = f$.

Dacă u_n este un asemenea şir minimizant, în virtutea faptului că $u_n \xrightarrow{\|\ \|_{H_{G^{-1}}} = \|\ \|_{H_A}} u_0$, rezultă că distanţa dintre termenul de rang n al şirului şi u_0, deci $\|u_n - u_0\|_{H_{G^{-1}}}$ poate fi făcută suficient de mică dacă rangul n este suficient de mare. În acest sens va fi înţeles în cele ce urmează faptul că u_n aproximează pe u_0. Rezultă de aici importanţa unei metode efective de construire a unui şir minimizant pentru funcţionala $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_{G^{-1}} = H_A$. O asemenea construcţie este furnizată de metoda Ritz.

Vom începe prin a observa următoarele: deoarece $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(G^{-1}) \subset H_{G^{-1}} = H_A$, avem

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) \geqslant \inf_{u \in \mathcal{D}(G^{-1})} \widetilde{\mathcal{F}}(u) \geqslant \inf_{u \in H_{G^{-1}} = H_A} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0). \qquad (5.2.1.76)$$

Cum însă (vezi (5.2.1.54)),

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \inf_{u \in H_A = H_{G^{-1}}} \widetilde{\mathcal{F}}(u),$$

din (5.2.1.76) rezultă

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(G^{-1})} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \inf_{u \in H_{G^{-1}}} \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \widetilde{\mathcal{F}}(u_0) \qquad (5.2.1.77)$$

Scanned with OKEN Scanner

punctul u_0 care realizează minimul fiind, după cum se știe,

$$u_0 = Gf \in \mathcal{D}(G^{-1}). \tag{5.2.1.78}$$

Așadar, problema găsirii punctului u care realizează minimul lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_{G^{-1}}$, revine la găsirea punctului $u_0 \in \mathcal{D}(G^{-1})$ care realizează minimul funcționalei $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $\mathcal{D}(G^{-1}) \subset H_{G^{-1}}$.

Dar, pe $\mathcal{D}(G^{-1})$, ținînd cont de (5.2.1.68) și (5.2.1.66), funcționala (5.2.1.68) se scrie astfel:

$$u \in \mathcal{D}(G^{-1}),\ \widetilde{\mathcal{F}}(u) = \langle G_u^{-1}, \varphi(u)\rangle_H - \langle f, \varphi(u)\rangle_H - \langle \varphi(u), f\rangle_H. \tag{5.2.1.79}$$

Sîntem conduși, așadar, la următoarea problemă: să se găsească punctul $u_0 \in \mathcal{D}(G^{-1})$ care realizează pe $\mathcal{D}(G^{-1})$ minimul funcționalei (5.2.1.79) știind că (sintetizăm aici proprietăți ale lui G^{-1} pe care le-am demonstrat anterior și pe care le vom utiliza efectiv în cele ce urmează):

1) $\mathcal{D}(G^{-1})$ este dens în $H_{G^{-1}} = H_A$;

2) $\langle G^{-1}u,\ \varphi(v)\rangle_H = \langle \varphi(u), G^{-1}v\rangle_H$ oricare ar fi $u, v \in \mathcal{D}(G^{-1})$; (5.2.1.80)

3) $\langle G^{-1}u, \varphi(u)\rangle_H \geqslant \gamma^2 \|\varphi(u)\|_H^2$ oricare ar fi $u \in \mathcal{D}(G^{-1})$. (5.2.1.81)

Utilizarea metodei Ritz în rezolvarea acestei probleme se bazează pe următoarele rezultate:

TEOREMA 5.2.1.5. *Fie $\varphi_n \in \mathcal{D}(G^{-1})$, $n \in N$, un șir de elemente din $\mathcal{D}(G^{-1})$. Dacă șirul $G^{-1}\varphi_n$, $n \in N$, este dens în H, atunci șirul φ_n, $n \in N$, este dens în $H_{G^{-1}}$.*

Demonstrație. Cum $\mathcal{D}(G^{-1})$ este dens în $H_{G^{-1}}$, va fi suficient să demonstrăm că în ipotezele teoremei, șirul φ_n, $n \in N$ este dens în $\mathcal{D}(G^{-1})$.

Fie v arbitrar în $\mathcal{D}(G^{-1})$ și fie $G^{-1}\ v = u \in H$. Cum, prin ipoteză, șirul $G^{-1}\varphi_n$, $n \in N$, este dens în H, există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, astfel încît

$$\left\| G^{-1}v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k G^{-1}\varphi_k \right\|_H = \left\| G^{-1}\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) \right\|_H < \varepsilon\gamma \tag{5.2.1.82}$$

γ fiind cel din (5.2.1.81).

Cum atît v cît şi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ sînt elemente din $\mathcal{D}(G^{-1})$, din (5.2.1.66), (5.2.1.81) şi (5.2.1.82) rezultă :

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2_{H_{G^{-1}}} = \left\langle G^{-1}\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right), \varphi\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right\rangle_H \leqslant$$

$$\leqslant \left\| G^{-1}\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right\|_H \left\| \varphi\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma} \left\| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|_{H_{G^{-1}}} \left\| G^{-1}\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right\|_H <$$

$$< \varepsilon\gamma \cdot \frac{1}{\gamma} \left\| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|_{H_{G^{-1}}}$$

aşadar

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|_{H_{G^{-1}}} < \varepsilon$$

şi teorema este demonstrată.

TEOREMA 5.2.1.6. *Dacă H este separabil, atunci $H_{G^{-1}} = H_A$ este de asemenea separabil.*

Demonstraţie. Fie H separabil şi fie φ_n, $n \in N$, un şir de elemente din H, dens în H. Cum G^{-1} aplică $G(H)$ pe H, există $\psi_n \in \mathcal{D}(G^{-1})$, astfel încît $\varphi_n = G^{-1}\psi_n$, $n \in N$. Conform teoremei 5.2.1.5, şirul ψ_n, $n \in N$, este dens în $H_{G^{-1}}$. Teorema este demonstrată.

Fie că H este separabil. După cum am văzut, atunci $H_{G^{-1}}$ este de asemenea separabil. Fie φ_n, $n \in N$, un sistem ortonormat complet în $H_{G^{-1}}$. Cum $\mathcal{D}(G^{-1})$ este dens în $H_{G^{-1}}$, ψ_n, $n \in N$, pot fi aleşi chiar din $\mathcal{D}(G^{-1})$.

Ideea metodei Ritz este următoarea : în loc să căutăm punctul care realizează minimul funcţionalei (5.2.1.79) pe $\mathcal{D}(G^{-1})$, vom căuta minimul acestei funcţionale pe subspaţiul finit dimensional generat de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Dacă u_n este punctul care realizează minimul funcţionalei (5.2.1.68) pe acest subspaţiu finit dimensional al lui $H_{G^{-1}}$, vom dovedi că $u_n \xrightarrow[\| \|_{H_{G^{-1}}}]{} u_0$ şi deci, în baza continuităţii lui φ, $\varphi(u_n) \xrightarrow[\| \|_H]{} \varphi(u_0)$, $n \to \infty$. Fie u_n punctul care realizează minimul funcţionalei (5.2.1.79) pe subspaţiul generat de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Evident, u_n se scrie

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \qquad (5.2.1.82)$$

iar valoarea lui $\widetilde{\mathcal{F}}$ dată de (5.2.1.79) în u_n este

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot \bar{a}_j \langle G^{-1}\varphi_i, \varphi(\varphi_j)\rangle_H - \sum_{i=1}^{n} a_i\langle \varphi(\varphi_i), f\rangle -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i\langle f, \varphi(\varphi_i)\rangle \qquad (5.2.1.83)$$

Fie că $a_j = a_j' + ia_j''$, $j = 1, \ldots, n$, și fie ψ funcția reală definită după cum urmează:

$$\psi(a_1', \ldots, a_n', a_1'', \ldots, a_n'') = \widetilde{\mathcal{F}}(u_n) \qquad (5.2.1.84)$$

Dacă u_n este punctul de minim al funcționalei (5.2.1.79) pe subspațiul generat de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, atunci punctul $(a_1', \cdots, a_n', a_1'', \cdots a_n'')$ este punctul de minim al funcției reale ψ în $R^{(2n)}$, deci, în mod necesar, avem

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_j'} = \frac{\partial\psi}{\partial a_j''} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \qquad (5.2.1.85)$$

Din (5.2.1.85) rezultă

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_j'} - i\frac{\partial\psi}{\partial a_j''} = 0$$

adică

$$\frac{\partial\psi}{\partial \bar{a}_j} = 0. \qquad (5.2.1.86)$$

Ținînd seama de (5.2.1.84) și (5.2.1.83), condițiile (5.2.1.86) se scriu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\langle G^{-1}\varphi_i, \varphi(\varphi_j)\rangle_H = \langle f, \varphi(\varphi_j)\rangle_H, \qquad j = 1, \cdots, n \qquad (5.2.1.87)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle_{H_{G^{-1}}} = \langle f, \varphi(\varphi_j)\rangle_H. \qquad (5.2.1.88)$$

Acesta este sistemul din care trebuie determinați coeficienții $a_1, \cdots, a_n$ ai metodei Ritz. Este un sistem liniar al cărui determinant este determi-

nantul Gramm al sistemului de elemente (evident liniar independente) $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$. Cum φ_n este un sistem ortonormat, din (5.2.1.88) rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = \langle f, \varphi(\varphi_j)\rangle_H, \quad j = 1, \cdots, n$$

adică

$$a_j = \langle f, \varphi(\varphi_j)\rangle_H \tag{5.2.1.89}$$

Ţinînd seama de (5.2.1.89), din (5.2.1.82) rezultă

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi(\varphi_k)\rangle_H \varphi_k. \tag{5.2.1.90}$$

Dar atunci cînd am studiat forma lui u_n în cazul în care H_{G-1} este separabil, am văzut că u_n dat de formula (5.2.1.89) defineşte termenul general al unui şir minimizant pentru funcţionala $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_{G-1} = H_A$.

În concluzie, u_n dat de (5.2.1.82) în care a_j sînt coeficienţii lui Ritz ce se determină din sistemul (5.2.1.88), este termenul general al unui şir minimizant al funcţionalei $\widetilde{\mathcal{F}}$ pe $H_{G-1} = H_A$.

Metoda lui Ritz pentru funcţionalele teoriei Hencky-Nadai [47 b] [24 d].

În § 5.1 am pus în evidenţă o clasă de funcţionale neliniare cărora le corespund diverse probleme la limită ale teoriei Hencky-Nadai, rezolvarea acestor probleme fiind echivalentă cu găsirea punctului care realizează minimul acestor funcţionale pe mulţimi de funcţii suficient de regulate care satisfac condiţii la limită liniare şi omogene. Astfel de funcţionale sînt: funcţionala (5.1.1.50), (5.1.1.51) — corespunzătoare primei probleme fundamentale a teoriei Hencky-Nadai, funcţionala (5.1.4.45), (5.1.4.46) corespunzătoare problemei torsiunii elasto-plastice, funcţionala (5.1.5.22), (5.1.5.23) corespunzătoare problemei plăcilor încastrate în teoria Hencky-Nadai. De remarcat că proprietăţile acestor funcţionale depind de proprietăţile funcţiei materiale a teoriei Hencky-Nadai. Aceasta permite un studiu unitar al acestor funcţionale.

Să mai remarcăm că funcţionalele corespunzătoare problemei torsiunii elasto-plastice şi problemei încovoierii plăcilor încastrate sînt cazuri particulare ale funcţionalei corespunzătoare primei probleme la limită a teoriei Hencky-Nadai. Funcţionala teoriei Hencky-Nadai se reduce la o funcţională de aceeaşi formă cu funcţionalele corespunzătoare problemei torsiunii şi încovoierii plăcilor încastrate, dacă în afara ipotezelor pe care le-am făcut în 5.1.1 se face şi ipoteza incompresibilităţii materialului.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru toate aceste funcționale a fost demonstrată existența soluției generalizate a problemei de minim și unicitatea acestei soluții.

În lucrarea [42 d] Langenbach a demonstrat posibilitatea aplicabilității metodei Ritz pentru construirea unui șir minimizant pentru funcționalele despre care am vorbit mai sus. Mai exact, el a arătat că soluțiile aproximative după Ritz formează un șir minimizant pentru funcționalele de tipul semnalat.

În lucrarea sa, Langenbach nu tranșează însă chestiunea rezolvării practice a sistemelor neliniare ce apar ca urmare a aplicabilității metodei Ritz, deci nu dă o metodă efectivă pentru determinarea coeficienților lui Ritz. Acest lucru nefiind făcut, este evident că construirea efectivă a șirurilor minimizante cu metoda Ritz nu este posibilă.

Rezolvarea efectivă a sistemelor de tip Ritz corespunzătoare funcționalelor despre care am vorbit mai sus, a făcut obiectul lucrărilor lui Davidenko [21], Mihlin [47 c] și Gahen-Torn [29].

Fie dat un sistem neliniar de n ecuații cu n necunoscute (a se vedea Davidenko [21]):

$$f_k(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{5.2.2.1}$$

unde λ este un parametru ce ia valori pe intervalul $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$. Fie că pentru o anume valoare a lui λ, să zicem λ_0, soluția (unică) a sistemului (5.2.2.1) este cunoscută:

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0. \tag{5.2.2''.2}$$

Presupunem că:

1) Toate funcțiile $f_1, \ldots, f_n$ sînt definite și continue într-un domeniu G, $n+1$ dimensional de variație pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$;

2) Există și sînt continue în G derivatele parțiale ale acestor funcții după toate argumentele;

3) $J = D(f_1, \ldots, f_n)/D(x_1, \ldots, x_n)$ este nenul în $(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_0)$. Se cere soluția sistemului (5.2.2.1) pentru $\lambda > \lambda_0$.

Se procedează astfel: luînd λ ca variabilă independentă și socotind $x_1, \cdots, x_n$, ca funcții de λ, din (5.2.2.1) rezultă

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_r} \frac{\mathrm{d}x_r}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\partial f_k}{\partial \lambda}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2.3}$$

Presupunem că determinantul acestui sistem este diferit de zero în toate punctele lui G, adică

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \Delta(x_1, \ldots, x_n, \lambda) \neq 0. \tag{5.2.2.4}$$

Rezolvînd (5.2.2.3) în raport cu $\frac{dx_r}{d\lambda}$ se obţine

$$\frac{dx_r}{d\lambda} = \frac{\Delta_r(x_1, \ldots, x_n, \lambda)}{\Delta(x_1, \ldots, x_n, \lambda)} = F_r(x_1, \ldots, x_n, \lambda), \quad r = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2.5}$$

Evident, curba

$$x_1 = x_1(\lambda), \quad x_2 = x_2(\lambda), \ldots, x_n = x_n(\lambda) \tag{5.2.2.6}$$

definită de sistemul (5.2.2.1) şi trecînd prin punctul $(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_0)$ va fi curba integrală a sistemului de ecuaţii diferenţiale (5.2.2.5).

Pentru a defini pentru un λ dat punctul curbei (5.2.2.6) corespunzător acestui λ sau, ceea ce este tot una, soluţia lui (5.2.2.1) corespunzătoare acestui λ, sistemul (5.2.2.5) se va integra numeric pe intervalul $\lambda_0 \leqslant \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ cu condiţiile iniţiale $\lambda = \lambda_0$; $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Pentru aceasta, pasul de integrare se va alege astfel încît punctele de împărţire a intervalului să fie valorile date ale parametrului λ.

Valorile numerice $x_1, \ldots, x_n$ obţinute prin integrare pentru fiecare valoare a lui λ vor fi soluţiile aproximative ale sistemului (5.2.2.1).

Metoda se aplică şi pentru sisteme neliniare de forma

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2.7}$$

Este suficient să se transforme sistemul (5.2.2.7) introducînd parametrul λ astfel încît:

a) pentru $\lambda = 1$ sistemul transformat să se reducă la sistemul (5.2.2.7),

b) pentru $\lambda = 0$ sistemul transformat să aibă soluţie unică ce poate fi uşor calculată.

Cu sistemul astfel transformat procedăm ca mai sus, sistemul de ecuaţii obţinut integrîndu-l pe intervalul $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, cu condiţiile iniţiale corespunzătoare lui $\lambda = 0$.

Soluţia sistemului (5.2.2.7) va fi soluţia sistemului transformat corespunzătoare lui $\lambda = 1$.

Rezultatele expuse mai sus vor fi utilizate pentru rezolvarea sistemelor neliniare Ritz [28], [29].

Fie F o funcţională definită pe o mulţime liniară $\mathcal{D}(F)$ densă într-un spaţiu Banach real, separabil $\mathcal{B}$ şi fie $Q = (DF)$. Fie că $\mathcal{D}(Q)$ este mulţime liniară şi densă în $\mathcal{B}$. În sfîrşit, fie că pentru orice $u \in \mathcal{D}(Q)$, Q are diferenţială în sensul lui Gâteaux liniară şi $(DQ)(u)$ este definit pe o mulţime densă ce conţine pe $\mathcal{D}(Q)$.

Fie că

$$\langle (DQ)(u) \cdot h_1, h_2 \rangle = \langle (DQ)(u) \cdot h_2, h_1 \rangle \tag{5.2.2.8}$$

$$\langle (DQ)(u) \cdot h, h \rangle > 0, \quad h \neq 0. \tag{5.2.2.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\{\varphi_k\}$ sistemul elementelor coordonate. Admitem că $\varphi_k \in \mathcal{D}(Q)$, $k = 1, 2, \ldots$. Cum se știe, în metoda Ritz, căutarea minimului funcționalei F pe subspațiul generat de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, punctul de minim fiind de forma $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$, conduce la condițiile

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_j} = 0, \tag{5.2.2.10}$$

unde ψ este funcția reală definită de

$$\psi(a_1, \ldots, a_n) = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\right) = F(u_n). \tag{5.2.2.11}$$

Ținînd seama de (5.2.2.11), condițiile (5.2.2.10) dau

$$\langle Q(u_n), \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2.12}$$

Acest sistem neliniar trebuie rezolvat pentru a găsi $a_1, \ldots, a_n$ și deci u_n. Urmînd metoda derivării după un parametru expusă la început, construim un nou sistem, depinzînd de λ, astfel încît pentru $\lambda = 0$, sistemul transformat să admită o soluție unică ce poate fi ușor calculată, iar pentru $\lambda = 1$, acest sistem să coincidă cu (5.2.2.12).

Acest sistem transformat se alege sub forma

$$a_j + \lambda[\langle Q(u_n), \varphi_j \rangle - a_j] = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2.13}$$

Evident,

$$a_j|_{\lambda=0} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2.14}$$

Din (5.2.2.13), derivînd cu λ, se obține

$$\frac{da_j}{d\lambda} + \lambda\left\{\sum_{k=1}^{n} [\langle (DQ)(u_n) \cdot \varphi_k, \varphi_j \rangle - \delta_{jk}] \frac{da_k}{d\lambda}\right\} + \\ + \langle Q(u_n), \varphi_j \rangle - a_j = 0. \tag{5.2.2.15}$$

Ținînd seama de (5.2.2.8) și (5.2.2.9), să considerăm spațiul energetic al operatorului $(DQ)(u_n)$, introducînd pe domeniul de definiție al lui $(DQ)(u_n)$ produsul scalar

$$[u, v] = \langle (DQ)(u_n) \cdot u, v \rangle \tag{5.2.2.16}$$

și fie $\| \ \|$ norma generată de acest produs scalar.

Atunci, matricea coeficienților derivatelor $\frac{da_k}{d\lambda}$ se poate scrie sub forma

$$(1-\lambda)\,I+\lambda\begin{pmatrix}[\varphi_1,\varphi_1] & [\varphi_2,\varphi_1]\cdots & [\varphi_n,\varphi_1]\\ [\varphi_1,\varphi_2] & [\varphi_2,\varphi_2]\cdots & [\varphi_n,\varphi_2]\\ \vdots & & \vdots\\ [\varphi_1,\varphi_n] & [\varphi_2,\varphi_n]\cdots & [\varphi_n,\varphi_n]\end{pmatrix}. \tag{5.2.2.17}$$

A doua matrice din (5.2.2.17) este matricea Gramm a sistemului liniar independent $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ și deci este pozitiv definită. Dar, atunci, matricea (5.2.2.17) are aceeași proprietate pentru orice $\lambda\in[0,1]$. Așadar, pentru orice $\lambda\in[0,1]$, determinantul matricii (5.2.2.17) este nenul și, deci, ecuațiile (5.2.2.15) pot fi rezolvate relativ la $\frac{da_j}{d\lambda}$,

$$\frac{da_j}{d\lambda}=\frac{\Delta_n^{(j)}}{\Delta_n}=g_j(a_1,\ldots,a_n,\lambda). \tag{5.2.2.18}$$

Facem următoarele ipoteze:

1) Ca funcții de $a_1,\ldots,a_n$, $\langle Q(u_n),\varphi_j\rangle$ și $\langle (DQ)(u_n)\cdot\varphi_k,\varphi_j\rangle$ au ordin polinomial de creștere

$$|\langle Q(u_n),\varphi_j\rangle|\leqslant P_m(|a_1|,\ldots,|a_n|), \tag{5.2.2.19}$$

$$|\langle (DQ)(u_n)\varphi_k,\varphi_j\rangle|\leqslant P_{m-1}(|a_1|,\ldots,|a_n|) \tag{5.2.2.20}$$

P_m și P_{m-1} fiind polinoame de grad m, $m-1$ respectiv, m putînd să depindă de n.

2) În orice interval $\delta\leqslant\lambda\leqslant 1$, $\delta>0$, avem

$$\langle (DQ)(u_n)\cdot h,h\rangle\geqslant N\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\|h\|_B^2, \tag{5.2.2.21}$$

N fiind o constantă pozitivă ce depinde de n și δ fixați.

Din (5.2.2.20) și (5.2.2.21) urmează

$$N_1\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{n(m-1)}{2}}\leqslant\Delta_n\leqslant P_{n(m-1)}(|a_1|,\ldots,|a_n|), \tag{5.2.2.22}$$

unde N_1 este o constantă pozitivă iar $P_{n(m-1)}$ un polinom de grad $n(m-1)$.

Într-adevăr, avem

$$\sum_{j,k=1}^{n}[\varphi_k,\varphi_j]\,t_kt_j=\left|\sum_{j=1}^{n}\varphi_jt_j\right|^2=\langle (DQ)(u_n)\cdot v_n,v_n\rangle$$

unde cu $\|\|$ am notat norma dată de produsul energetic iar $v_n = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j t_j$. După (5.2.2.21) urmează

$$\langle (DQ)(u_n)\cdot v_n, v_n\rangle \geqslant N\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{m-1}{2}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k t_k \right\|_{\mathcal{B}}^2 \qquad (5.2.2.23)$$

Pe sfera unitate $\sum_{k=1}^{n} t_k^2 = 1$, funcția

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k t_k \right\|_{\mathcal{B}}^2$$

este continuă și pozitivă (dacă ar exista un punct al sferei unitate pentru care $\left\| \sum_{k=1}^{n} t_k \varphi_k \right\|^2 = 0$, aceasta ar contrazice faptul că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sînt liniar independente). Rezultă că această funcție are o margine inferioară pozitivă pe sfera unitate, așadar, există o constantă $L > 0$ astfel încît, oricare ar fi t_k, $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} t_k^2 = 1$, avem

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} t_k \varphi_k \right\|_{\mathcal{B}}^2 \geqslant L \qquad (5.2.2.24)$$

Ținînd seama de (5.2.2.24) și (5.2.2.21) rezultă

$$\sum_{j,k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j]\, t_k t_j = \langle (DQ)(u_n)\cdot v_n, v_n\rangle \geqslant LN\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{m-1}{2}}, \quad \sum_{k=1}^{n} t_k^2 = 1.$$

Această ultimă inegalitate arată că toate valorile proprii ale matricei

$$\begin{pmatrix} [\varphi_1, \varphi_1] & [\varphi_2, \varphi_1] & \cdots & [\varphi_n, \varphi_1] \\ [\varphi_1, \varphi_2] & [\varphi_2, \varphi_2] & \cdots & [\varphi_n, \varphi_2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\varphi_1, \varphi_n] & [\varphi_2, \varphi_n] & \cdots & [\varphi_n, \varphi_n] \end{pmatrix}$$

sînt, pentru $\delta \leqslant \lambda \leqslant 1$, mai mari decît $LN\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{m-1}{2}}$. Atunci, însă, toate valorile proprii ale matricei (5.2.2.17) sînt mai mari decît $\delta LN\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{m-1}{2}}$, iar pentru Δ_n, egal cu produsul acestor valori proprii,

avem

$$\Delta_n \geqslant N_1 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{n(m-1)}{2}} ; \quad N_1 = (\delta L N)^n \qquad (5.2.2.25)$$

ceea ce demonstrează partea stîngă a inegalității (5.2.2.22). Partea dreaptă a inegalității (5.2.2.22) rezultă imediat din (5.2.2.21). Să demonstrăm acum că problema Cauchy (5.2.2.14), (5.2.2.15) are soluție pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Să începem prin a observa că datorită faptului că Δ_n este mărginit inferior, $g_j(a_1, \ldots, a_n, \lambda)$, $j = 1, \ldots, n$, din (5.2.2.18) sînt continue și cu derivate continue după toate argumentele, pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $-\infty < a_j < \infty$, $j = 1, \ldots, n$.

Fie $\lambda^* \in (0, 1)$, $a^* \in (0, +\infty)$ și domeniul

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*, \quad -a^* \leqslant a_j \leqslant a^*, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (5.2.2.26)$$

În acest domeniu sînt satisfăcute condițiile teoremei clasice de rezolvare a problemei Cauchy, și deci problema (5.2.2.18), (5.2.2.19) are soluție pentru $\lambda \in [0, \sigma]$, $\sigma = \min \left(\lambda^*, \frac{a^*}{M} \right)$, M fiind cel mai mare dintre maximele funcțiilor g_j în domeniul (5.2.2.26).

Să considerăm acum un număr δ, $0 < \delta < \sigma$.

Fie că pentru $\lambda = \delta$, $a_j = \tilde{a}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Fie domeniul

$$\delta \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad -\infty < a_j < +\infty, \quad j = 1, \ldots, n \qquad (5.2.2.27)$$

și problema Cauchy pentru sistemul (5.2.2.18) cu condițiile inițiale

$$a_j|_{\lambda=\delta} = \tilde{a}_j, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (5.2.2.28)$$

Din relațiile (5.2.2.18)—(5.2.2.21) rezultă ([47 b]) că derivatele $\partial g_j / \partial a_k$ sînt mărginite în domeniul (5.2.2.27). Se știe atunci că există o soluție unică a problemei (5.2.2.18), (5.2.2.28), definită pe $\delta \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Așadar, problema Cauchy (5.2.2.14), (5.2.2.18) are soluție definită pe $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, ceea ce, după cum am văzut, înseamnă rezolvabilitatea sistemului Ritz (5.2.2.12).

În lucrarea sa [29], Gagen-Torn a dovedit că pentru funcționale de tipul funcționalei teoriei Hencky-Nadai (funcționala (5.1.50), (5.1.51)), condițiile (5.2.2.19)—(5.2.2.21) sînt satisfăcute pentru $m = 1$. Mai precis, rezultatul său este următorul:

TEOREMA 5.2.2.1. *Fie $\Omega \subset R^{(n)}$ un domeniu mărginit de frontieră suficient de regulată și fie $\dot{\Omega}$ frontiera sa. Fie $\Phi^{(2)}(\Omega)$ mulțimea funcțiilor*

continue împreună cu derivatele lor pînă la ordinul 2l inclusiv în $\bar{\Omega}$ *și care sînt nule pe* $\dot{\Omega}$.

Fie funcționala

$$F(u) = Q(u) + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{s} \int_0^{\tau_i(u)} g_i(\xi)\, d\xi \right) d\Omega - \int_\Omega fu\, d\Omega \quad (5.2.2.29)$$

definită pe $\Phi^{(2l)}(\Omega)$, *unde*

a) $Q(u)$ *este funcțională pătratică, nenegativă;*

b) $\tau_i(u)$ *sînt forme pătratice în derivatele de ordinul l ale lui u (ale componentelor lui* $\mathbf{u}$, *dacă* $\mathbf{u}$ *este vectorială);*

c) *pentru orice* $u \in \Phi^{(2l)}(\Omega)$ *și măcar pentru un indice* i_0,

$$\int_\Omega \tau_{i_0}(u)\, d\Omega \geqslant \gamma^2 \int_\Omega u^2\, d\Omega, \quad \gamma^2 = \text{const.} > 0; \quad (5.2.2.30)$$

d) *funcțiile* g_i *au derivate continue pînă la ordinul* $l+1$;

$$\text{e)}\ 0 \leqslant g_i(\xi) < c_1 < \infty, \quad c_1 = \text{const.}, \quad i = 1, \ldots, s \quad (5.2.2.30')$$

și măcar pentru i_0,

$$0 < c_0 < g_{i_0}(\xi) \quad (5.2.2.31)$$

$$\text{f)}\ 0 \leqslant g_i(\xi) + 2\xi\, g_i'(\xi) \leqslant k, \quad i = 1, \ldots s, \quad k = \text{const.} \quad (5.2.2.32)$$

și măcar pentru i_0

$$0 < \varkappa \leqslant g_{i_0}(\xi) + 2\xi\, g_{i_0}'(\xi), \quad \varkappa = \text{const.} \quad (5.2.2.33)$$

g) $f \in L_2(\Omega)$ (*sau lui* $\mathbf{L}_2(\Omega)$).

Atunci, funcționala (5.2.2.29) *satisface condițiile* (5.2.2.19)—(5.2.2.21) *pentru* $m = 1$.

Ținînd seama de (5.1.1.39) putem enunța următoarea teoremă:

TEOREMA 5.2.2.2. [29]. *Dacă luăm:*

a) $l = 1 = s = i_0$

$$\text{b)}\ \tau_{i_0}(\mathbf{u}) = \tau_1(\mathbf{u}) = \Gamma(\mathbf{u}) = \frac{4}{3}\, \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\, \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \quad (5.2.2.34)$$

$$\text{c)}\ Q(\mathbf{u}) = \frac{9k}{2} \int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{u})\, d\Omega, \quad (5.2.2.35)$$

atunci funcţionala teoriei de plasticitate a lui Hencky-Nadai — funcţionala (5.1.1.50), (5.1.1.51) — *satisface condiţiile teoremei lui Gahen-Torn* (teorema 5.2.2.1).

Putem aşadar conchide că dispunem de o metodă efectivă de construcţie a unui şir minimizant pentru prima problemă fundamentală a teoriei Hencky-Nadai, dacă cunoaştem un sistem de elemente coordonate.

Vom face următoarea observaţie, importantă pentru calculele efective: pentru toate domeniile Ω pentru care în teoria elasticităţii liniare şi izotrope a fost rezolvată problema lui Dirichlet cu date nule, construindu-se un şir minimizant în $\Phi^{(2)}(\Omega)$ cu metoda Ritz pentru funcţionala

$$F(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{Eu}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - 2 \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{L_2(\Omega)},$$

se poate construi un şir minimizant pentru funcţionala teoriei plasticităţii cu aceeaşi metodă, pornind de la acelaşi sistem de elemente coordonate.

Aceeaşi observaţie se poate face cu privire la rezolvarea problemei torsiunii elastice

$$\Delta u = -1, \quad u|_S = 0,$$

construindu-se un şir minimizant pentru funcţionala

$$F(u) = \langle -\Delta u, u \rangle_{L_2(\Omega)} - 2 \langle 1, u \rangle_{L_2(\Omega)}$$

şi la construirea unui şir minimizant pentru funcţionala (5.1.4.45) corespunzătoare problemei torsiunii în teoria Hencky-Nadai.

Rezolvarea efectivă a sistemelor neliniare Ritz care apar, conduce, aşa cum am văzut, la integrarea numerică a unei probleme Cauchy pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, pus sub formă normală, problemă care, după cum se ştie, poate fi programată pentru o maşină electronică de calcul.

Încheiem acest subparagraf observînd că în toată lucrarea nu am considerat decît probleme la limită liniare şi omogene pentru operatori diferenţiali neliniari.

După cum se ştie, problemele la limită liniare dar neomogene pentru operatori liniari pot fi uşor reduse la probleme la limită liniare şi omogene, dacă se găseşte măcar un element din $\mathcal{D}(P)$ care satisface condiţiile la limită. Vom dovedi că lucrurile stau la fel pentru operatorii ce satisfac condiţiile teoremei variaţionale a lui Langenbach.

Fie de rezolvat ecuaţia $Pu = f$ cu condiţiile la limită liniare şi neomogene

$$\Gamma_i u = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{5.2.2.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie că există $u_0 \in \mathcal{D}(P)$ astfel încît

$$\Gamma_i u_0 = \varphi_i, \quad x \in \dot{\Omega}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{5.2.2.37}$$

Căutăm soluția ecuației $Pu = f$ sub forma

$$u = u_{00} + u_0. \tag{5.2.2.38}$$

Pentru a determina pe u_{00} sîntem conduși la următoarea problemă

$$Q_{u_0} u_{00} = P(u_{00} + u_0) = f, \tag{5.2.2.39}$$

$$\Gamma_i u_{00} = 0. \tag{5.2.2.40}$$

Fie Q definit astfel

$$Qu_{00} = Q_{u_0} u_{00} - P(u_0). \tag{5.2.2.41}$$

Vom înlocui ecuația (5.2.2.39) cu ecuația echivalentă

$$Qu_{00} = f - P(u_0) \tag{5.2.2.42}$$

Așadar, pentru a determina u_{00} vom rezolva ecuația (5.2.2.42) cu condițiile la limită (5.2.2.40).

Dacă P satisface condițiile teoremei 2.3.1, atunci Q le satisface de asemenea.

Într-adevăr, avem

$$Q(0) = Q_{u_0}(0) - P(u_0) = P(u_0) - P(u_0) = 0$$

$$(DQ)(u_{00}) \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{Q(u_{00} + th) - Q(u_{00})}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{P(u_{00} + th + u_0) - P(u_{00} + u_0)}{t} =$$

$$= (DP)(u_{00} + u_0) \cdot h$$

și acum se verifică imediat că și celelalte condiții ale teoremei 2.3.1 sînt satisfăcute.

Să aplicăm rezultatele de mai sus la cazul operatorului teoriei Hencky-Nadai.

Fie aşadar de rezolvat ecuaţia

$$\mathbf{Pu} = \mathbf{f}, \tag{5.2.2.43}$$

unde $\mathbf{P}$ este operatorul teoriei Hencky-Nadai (vezi (5.1.1.13), (5.1.1.15)) cu condiţiile la frontieră

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{x} \in \dot{\Omega}. \tag{5.2.2.44}$$

Este vorba aşadar de problema lui Dirichlet cu date neomogene pentru operatorul teoriei Hencky-Nadai.

Fie că $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ şi satisface condiţia (5.2.2.43) la frontieră. Atunci, căutînd soluţia ecuaţiei (5.2.2.43) sub forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \tag{5.2.2.45}$$

sîntem conduşi la a determina pe $\mathbf{w}$ ca soluţie a următoarei probleme

$$\mathbf{Qw} = \mathbf{f} - \mathbf{Pv}_0 \tag{5.2.2.46}$$

$$\mathbf{w} = 0, \ \mathbf{x} \in \dot{\Omega}, \tag{5.2.2.47}$$

unde $\mathbf{Q}$ este definit de

$$\mathbf{Qw} = \mathbf{P}(\mathbf{w} + \mathbf{v}_0) - \mathbf{Pv}_0. \tag{5.2.2.48}$$

Aşa cum am remarcat deja, pentru operatorul $\mathbf{Q}$ sînt îndeplinite condiţiile teoremei variaţionale a lui Langenbach, pentru $H(\Omega) = \mathbf{L}_2(\Omega)$, $M^0 = M = \Phi^{(2)}(\Omega)$. După cum se ştie, un prim rezultat al acestei teoreme este unicitatea soluţiei în sens clasic pentru problema (5.2.2.46), (5.2.2.47). Aşadar, dacă există o soluţie a problemei (5.2.2.46), (5.2.2.47), fie ea $\mathbf{w}_0$, această soluţie este unică. După cele de mai sus,

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0$$

este soluţie a ecuaţiei (5.2.2.43) cu condiţiile la frontieră (5.2.2.44). De aici nu rezultă însă unicitatea soluţiei acestei probleme. Pentru a obţine unicitatea, trebuie să demonstrăm că soluţia problemei (5.2.2.43), (5.2.2.44) este independentă de alegerea elementului $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ care satisface condiţiile la limită (5.2.2.44). Fie $\mathbf{v}_{00} \neq \mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ care satisface condiţiile la limită (5.2.2.44). Procedînd ca mai sus, sîntem conduşi să considerăm problema

$$\mathbf{Qw} = \mathbf{f} - \mathbf{Pv}_{00}, \tag{5.2.2.49}$$

$$\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \dot{\Omega}. \tag{5.2.2.50}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\mathbf{Q}$ este definit de

$$\mathbf{Q}w = \mathbf{P}(w + v_{00}) - \mathbf{P}v_0. \tag{5.2.2.51}$$

Tot la fel ca mai sus, dacă există o soluție a problemei (5.2.2.49), (5.2.2.50), fie ea w_{00}, această soluție este unică iar

$$u_{00} = v_{00} + w_{00} \tag{5.2.2.52}$$

este soluție a problemei (5.2.2.43), (5.2.2.44).

Pentru a demonstra unicitatea soluției acestei probleme trebuie arătat că

$$u_{00} = u_0. \tag{5.2.2.2.53}$$

Pentru demonstrație să observăm următoarele :

$$\widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega) = \{u \mid u \in C^{(2)}(\bar{\Omega}),\ u(x) = u^0(x),\ x \in \dot{\Omega}\} \tag{5.2.2.54}$$

este o mulțime convexă, ceea ce se verifică imediat.

Pe de altă parte, conform unui rezultat al lui Minty [48 a], dacă pe $\widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt}[\langle \mathbf{P}(u + tg), g\rangle_{L_2(\Omega)}]_{t=0},\quad u, v \in \widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega),\quad y = v - u \neq 0$$

există și este strict pozitivă, aceasta este suficient pentru ca $\mathbf{P}$ să fie strict monoton pe $\widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega)$.

Dar calcule simple arată că

$$\frac{d}{dt}[\langle \mathbf{P}(u + tg), g\rangle_{L_2(\Omega)}]_{t=0} = \langle (D\mathbf{P})\,(u + t(v - u)) \cdot (v - u), v - u\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Însă, este evident că dacă $u, v \in \widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, atunci $u - v \in \Phi^{(2)}\Omega$. Or, pe $\Phi^{(2)}(\Omega)$, $\mathbf{P}$ are diferențială în sens Gâteaux pozitiv definită (a se vedea (5.1.1.48)), deci

$$\frac{d}{dt}[\langle \mathbf{P}(u + tg), g\rangle_{L_2(\Omega)}]_{t=0} \geqslant \gamma^2 \|v - u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

oricare ar fi $u, v \in \widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, $u \neq v$.

Aşadar, $\mathbf{P}$ este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe $\widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega)$. De aici rezultă că $\mathbf{u}_{00} = \mathbf{u}_0$.

Într-adevăr, dacă am avea $\mathbf{u}_{00} \neq \mathbf{u}_0$, atunci, pe de-o parte,

$$\langle \mathbf{P}\mathbf{u}_{00} - \mathbf{P}\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_{00} - \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = 0 \tag{5.2.2.55}$$

căci $\mathbf{P}\mathbf{u}_{00} = \mathbf{P}\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}$, iar pe de altă parte,

$$\langle \mathbf{P}\mathbf{u}_{00} - \mathbf{P}\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_{00} - \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega)} > 0, \tag{5.2.2.56}$$

căci $\mathbf{u}_{00} \neq \mathbf{u}_0$ şi $\mathbf{P}$ este strict monoton pe $\widetilde{\Phi}^{(2)}(\Omega)$.

Relaţiile (5.2.2.55), (5.2.2.56) sînt, evident, contradictorii. Ideea de a obţine unicitatea utilizînd rezultatul lui Minty expus mai sus aparţine lui Beju [8] care a folosit-o pentru problema analoagă a teoriei elasticităţii.

§ 5.3. Soluţii exacte în teoria Hencky-Nadai. Problema torsiunii elasto-plastice [24 i], [42 b]

Reluăm aici o problemă abordată de Langenbach în [42 b] ţinînd cont de un rezultat al lui Ladîjenskaia şi Uraltzeva [40]. Acest rezultat dă posibilitatea obţinerii unei teoreme de existenţă pentru soluţia problemei torsiunii în teoria Hencky-Nadai cu o tehnică ce este caracteristică teoriei Leray-Schauder. Ţinînd cont că operatorul torsiunii elasto-plastice este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$ (a se vedea teorema 5.3.4) rezultă de asemenea unicitatea soluţiei.

1. *Definiţii. Notaţii* [40] Fie $\bar{\Omega}$ aderenţa în $E^{(n)}$ a unei mulţimi deschise şi mărginite Ω de frontieră $\dot{\Omega}$ şi fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punct generic al său.

Vom nota cu $C_{l,0}(\Omega)$ spaţiul funcţiilor u care sînt continue împreună cu derivatele lor după x_k pînă la ordinul l inclusiv în Ω, restricţii de funcţii continue pe $\bar{\Omega}$.

Considerăm pe $C_{l,0}(\Omega)$ următoarea normă

$$|u|_{C_{l,0}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{l} \max_{x \in \Omega} |D^k u(x)|. \tag{5.3.1}$$

Vom nota de asemenea cu $C_{l,\alpha}(\Omega)$ spaţiul funcţiilor ce aparţin lui $C_{l,0}(\Omega)$ şi care au proprietatea

$$\max_{\substack{x, x+h \in \Omega \\ |h|>0}} \frac{|D^l u(x+h) - D^l u(x)|}{|h|^\alpha} = \Delta^\alpha D^l u < \infty. \tag{5.3.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe $C_{l,\alpha}(\Omega)$, norma va fi dată de

$$|u|_{C_{l,\alpha}(\Omega)} = |u|_{C_{l,0}(\Omega)} + \Delta^{\alpha} D^{l} u. \tag{5.3.3}$$

În normele date de (5.3.1) și (5.3.3), spațiile $C_{l,0}$ respectiv $C_{l,\alpha}$ sînt complete.

Cu μ_k și ν_k vor fi notate funcții numerice nedescrescătoare, respectiv necrescătoare, definite pe $[0,+\infty)$, mărginite pentru fiecare valoare finită a lui $\xi \in [0, +\infty)$.

TEOREMA 5.3.1. (Ladijenskaia și Uraltzeva [40]). *Fie ecuația*

$$M_1(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u, u_{x_k})) + a(x, u, u_{x_k}) = 0 \tag{5.3.4}$$

cu condițiile la limită

$$u|_{\dot{\Omega}} = 0 \tag{5.3.5}$$

și fie

$$M(u, \tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u, u_{x_k}, \tau)) + a(x, u, u_{x_k}, \tau) \tag{5.3.6}$$

o familie de operatori care depind de $\tau \in [0,1]$ cu regularitatea cerută de teoria Leray-Schauder și care satisfac următoarele condiții:

1) *pentru $\tau = 1$, $M(u, 1)$ se reduce la M_1;*

2) *pentru $\tau = 0$, problema $M(u, 0) = 0$, $u|_{\dot{\Omega}} = 0$, posedă un număr finit de soluții independente de indice impar;*

3) *ca funcții de variabilele lor, funcțiile $a_i(x, u, u_{x_k}, \tau)$ și $a(x, u, u_{x_k}, \tau)$ aparțin spațiilor $C_{2,\alpha}$ și $C_{1,\alpha}$ respectiv;*

4) *pentru fiecare $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$, sînt îndeplinite următoarele condiții*

$$\nu_1(|u|)(p^2+1)^{\frac{m-2}{2}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leqslant \mu_1(|u|)(p^2+1)^{\frac{m-2}{2}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \nu_1 > 0, \tag{5.3.7}$$

$$|a(x, u, p_k, \tau)| \leqslant \mu_2(|u|)(p^m + 1), \tag{5.3.8}$$

$$a_i(x, u, p_k, \tau) p_i \geqslant \nu_2(|u|) p^m - \mu_3(|u|), \ \nu_2 > 0, \ m > 1, \tag{5.3.9}$$

unde am utilizat următoarele notații, $p_k = u_{x_k}$, $p = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2\right)^{1/2}$;

5) $\dot{\Omega} \in C_{2,\alpha}$;

6) *pentru orice soluție* $u(x, \tau)$ *a problemei* $M(u, \tau) = 0$, $u|_{\dot{\Omega}} = 0$, *se poate indica o estimare aprioricâ, uniformă cu* τ *pentru* $\max_{x \in \Omega} |u(x, \tau)|$.

Atunci problema (5.3.4), (5.3.5) *posedă cel puțin o soluție care aparține spațiului* $C_{2,\alpha}(\Omega) \cap C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

2. După cum am văzut în subparagraful 5.1.4, problema torsiunii unei bare cilindrice de secțiune Ω, simplu conexă, conduce în teoria Hencky-Nadai la ecuația

$$M_1 u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} [f(T(\operatorname{grad} u)) p_i] + 2\omega = 0 \tag{5.3.10}$$

cu condițiile la limită

$$u|_{\dot{\Omega}} = 0. \tag{5.3.11}$$

În (5.3.10), $\omega > 0$ este o constantă avînd semnificația fizică de torsiune pe unitatea de lungime în timp ce f este funcția materială a teoriei Hencky-Nadai pe care o vom presupune de clasă $C^{(2)}[0, +\infty)$ și satisfăcînd următoarele condiții

$$\alpha_2 \geqslant f(\xi) \geqslant \alpha_1; \quad \xi \geqslant 0, \quad \alpha_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha_i > 0, \tag{5.3.12}$$

$$\beta_2 \geqslant f(\xi) + 2\xi f'(\xi) \geqslant \beta_1; \quad \xi \geqslant 0, \quad \beta_i = \text{const.}, \quad \beta_i > 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.3.13}$$

Cum am atras deja atenția, aceste condiții exprimă fapte fizice bine cunoscute în teoria Hencky-Nadai.

Pentru fiecare $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in E^{(2)}$, cu $T(\xi)$ a fost notată forma patratică nenegativă

$$T(\xi) = \frac{1}{3}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

iar cu $T(\xi, \eta)$, forma biliniară generată de $T(\xi)$.

TEOREMA 5.3.2. *Fie*

$$M(u, \tau) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} [p_i(\tau f(T(\operatorname{grad} u)) + (1 - \tau))] + 2\omega. \tag{5.3.14}$$

Dacă

$$a_i = p_i(\tau f(T\,(\operatorname{grad} u)) + (1 - \tau)) \tag{5.3.15}$$

aparțin spațiului $C_{2,\alpha}$ *și* $\dot{\Omega} \in C_{2,\alpha}$, *atunci* $M(u, \tau)$ *satisface condițiile teoremei* 5.3.1 *pentru*

$$\begin{aligned} m &= 2 \\ \nu_1(|u|) &= \min\{1, \alpha_1, \beta_1\}, \\ \mu_1(|u|) &= \max\{1, \alpha_2, \beta_2\}, \\ \mu_2(|u|) &= 2\omega, \\ \nu_2(|u|) &= \min(1, \alpha_1), \\ \mu_3(|u|) &= 0. \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Demonstrație. Evident, condițiile 1) și 2) ale teoremei 5.3.1 și de asemenea condiția impusă de (5.3.8), sînt satisfăcute. În particular, pentru $\tau = 0$, problema $M(u, 0) = 0$, $u|_{\dot{\Omega}} = 0$ se reduce la $\Delta u = -2\omega$, $u|_{\dot{\Omega}} = 0$.

Condiția impusă de (5.3.7) este de asemenea îndeplinită.

Într-adevăr, calculele dau

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\,\xi_i\,\xi_j = 3\{&(1 - \tau)\,T(\xi) + \tau\,[f(T\operatorname{grad} u))\,T(\xi) + \\ &+ 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\,T^2\,(\operatorname{grad} u, \xi)]\} \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Fie f'^+ și f'^- partea pozitivă, respectiv negativă a funcției f'. Utilizînd inegalitatea lui Cauchy pentru forma pătratică nenegativă $T(\xi)$, rezultă

$$\begin{aligned} &[f(T\,(\operatorname{grad} u)) + 2f'^+(T\,(\operatorname{grad} u))\,T\,(\operatorname{grad} u)]\,T(\xi) \geqslant \\ &\geqslant f(T\,(\operatorname{grad} u))\,T(\xi) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\,T^2\,(\operatorname{grad} u, \xi) \geqslant \\ &\geqslant [f(T\,(\operatorname{grad} u)) - 2f'^-(T\,(\operatorname{grad} u))\,T\,(\operatorname{grad} u)]\,T(\xi). \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Dacă $f' \geqslant 0$, atunci $f'^+ = f'$, $f'^- = 0$, și (5.3.18) devine:

$$\begin{aligned} &[f(T\,(\operatorname{grad} u)) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\,T\,(\operatorname{grad} u)]\,T(\xi) \geqslant \\ &\geqslant f(T\,(\operatorname{grad} u))\,T(\xi) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\,T^2\,(\operatorname{grad} u, \xi) \geqslant \\ &\geqslant f(T\,(\operatorname{grad} u))\,T\,(\xi). \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd cont de (5.3.12) şi (5.3.13), din (5.3.19) rezultă

$$\beta_2\, T(\xi) \geqslant f(T\,(\operatorname{grad} u))\; T(\xi) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\; T^2\,(\operatorname{grad} u, \xi) \geqslant \alpha_1\, T(\xi). \tag{5.3.20}$$

Dacă $f' < 0$, atunci $f'^{+} = 0$, $f'^{-} = -f'$, şi (5.3.18) devine

$$f(T\,(\operatorname{grad} u))\; T(\xi) \geqslant$$

$$\geqslant f(T\,(\operatorname{grad} u))\; T(\xi) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\; T^2\,(\operatorname{grad} u, \xi) \geqslant$$

$$\geqslant [f(T\,(\operatorname{grad} u)) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\; T\,(\operatorname{grad} u)]\; T\,(\xi). \tag{5.3.21}$$

Ţinînd cont de (5.3.12) şi (5.3.13), din (5.3.21) rezultă

$$\alpha_2\, T(\xi) \geqslant f(T\,(\operatorname{grad} u))\; T(\xi) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u))\; T^2\,(\operatorname{grad} u, \xi) \geqslant$$

$$\geqslant \beta_1\, T(\xi). \tag{5.3.22}$$

Comparînd (5.3.20) cu (5.3.22), se obţine

$$\max(\alpha_2, \beta_2)\; T(\xi) \geqslant f(T\,(\operatorname{grad} u))\; T(\xi) + 2f'(T\,(\operatorname{grad} u)\; T^2\,(\operatorname{grad} u, \xi) \geqslant$$

$$\geqslant \min(\alpha_1, \beta_1)\; T(\xi) \tag{5.3.23}$$

Ataşînd la această ultimă relaţie rezultatul furnizat de (5.3.17), se obţine

$$3\,[\tau \max(\alpha_2, \beta_2) + (1 - \tau)]\; T(\xi) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 3\,[\tau \min(\alpha_1, \beta_1) + (1 - \tau)]\; T(\xi) \tag{5.3.24}$$

şi deci

$$\max\{1, \max(\alpha_2, \beta_2)\}\; (\xi_1^2 + \xi_2^2) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant \min\{1, \min(\alpha_1, \beta_1)\}\; (\xi_1^2 + \xi_2^2). \tag{5.3.25}$$

Condiţia impusă de (5.3.9) este de asemenea satisfăcută.

Într-adevăr,

$$a_i p_i = [\tau f(T(\text{grad } u)) + (1-\tau)]\, p^2 \geqslant$$

$$\geqslant [\tau \alpha_1 + (1-\tau)]\, p^2 \geqslant \min(\alpha_1, 1)\, p^2. \tag{5.3.26}$$

Pentru a demonstra că condiția 6) a teoremei 5.3.1 este satisfăcută, este suficient să remarcăm că ecuația $M(u, \tau) = 0$, unde $M(u, \tau)$ este dat de (5.3.14), poate fi scrisă sub forma

$$A(p_1, p_2, \tau)\, r + 2B(p_1, p_2, \tau)\, s + C(p_1, p_2, \tau)\, t + 2\omega = 0, \tag{5.3.27}$$

unde

$$A(p_1, p_2, \tau) = 1 + \tau\left[f(T(\text{grad } u)) + \frac{2}{3} f'(T(\text{grad } u))\, p_1^2 - 1\right],$$

$$B(p_1, p_2, \tau) = \frac{2}{3}\tau f'(T(\text{grad } u))\, p_1 p_2, \tag{5.3.28}$$

$$C(p_1, p_2, \tau) = 1 + \tau\left[f(T(\text{grad } u)) + \frac{2}{3} f'(T(\text{grad } u))\, p_2^2 - 1\right],$$

$$r = \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial y}, \quad t = \frac{\partial p_2}{\partial y}.$$

Sub această formă se recunoaște familia $M(u, \tau)$ considerată de Langenbach (a se vedea [42 b], p. 227).

Diferența între coeficienții care intervin în (5.3.28) și cei din expresiile analoage din lucrarea lui Langenbach are explicația următoare: noi am lucrat cu tensorul deformație $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (în lucrarea lui Langenbach, pentru $i \neq j$, ε_{ij} sînt dați de expresiile $\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ ceea ce este dezavantajos în calcule căci, atunci, ε_{ij} nu mai reprezintă componentele unui tensor) și, de asemenea, în legea fizică a teoriei Hencky-Nadai,

$$\gamma_0 = f(\tau_0^2)\, \tau_0$$

γ_0 și τ_0 sînt date de

$$\gamma_0^2 = \frac{4}{3}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \tau_0^2 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{ll}}{3}\delta_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{ll}}{3}\delta_{ij},$$

ceea ce, datorită deosebirii remarcată mai sus în ceea ce privește notarea componentelor deformației, atrage o deosebire corespunzătoare față de expresiile analoage din lucrarea lui Langenbach.

Aceste deosebiri de coeficienți nu împiedică, așa după cum vom vedea, utilizarea metodei dată de Langenbach (vezi [42 b], p. 226) pentru a obține o estimare apriorică, uniformă cu τ pentru $\max_{x\in\Omega} |u(x,\tau)|$, $u(x,\tau)$ fiind orice eventuală soluție a ecuației (5.3.27) din $C_{3,\alpha}(\Omega)\cap C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, nulă la frontieră.

Vom expune mai jos această metodă.

Fie $u(x,y,\tau)$ o soluție a ecuației (5.3.27) care pentru fiecare τ fixat în [0,1] este din $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C_{3,\alpha}(\Omega)$ și nulă la frontieră. Vom începe prin a observa că pentru orice τ fixat în [0,1], funcția $(x,y)\in\bar{\Omega}$, $(x,y)\to u(x,y,\tau)$, nu poate avea puncte de minim în Ω.

Într-adevăr, dacă un asemenea punct ar exista în Ω, atunci în acest punct am avea în mod necesar

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0, \tag{5.3.29}$$

ceea ce, ținînd seama de (5.3.27), (5.3.28), atrage

$$[1+\tau(f(0)-1)]\,\Delta u+2\omega=0$$

adică

$$[(1-\tau)+\tau f(0)]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2\omega=0. \tag{5.3.30}$$

Această egalitate cu zero este, însă, imposibilă.

Într-adevăr, ținînd seama că $\omega>0$ și $f(\xi)\geqslant\alpha_1>0$, oricare ar fi $\xi\geqslant 0$, precum și de condițiile (5.3.29), rezultă că fiecare dintre termenii sumei din (5.3.30) este strict pozitiv, deci egalitatea cu zero exprimată de (5.3.30) este imposibilă. Cum, ținînd seama de condițiile de regularitate impuse lui $u(x,y,\tau)$, rezultă că pentru orice τ fixat în [0,1], funcția $(x,y)\in\bar{\Omega}$, $(x,y)\to u(x,y,\tau)$, posedă cel puțin un punct de minim în $\bar{\Omega}$, și cum un asemenea punct nu poate fi în Ω, el este în $\dot{\Omega}$, pe care, însă $u(x,y,\tau)$ este nulă. În concluzie, oricare ar fi $\tau\in[0,1]$ și $u(x,y,\tau)$ o soluție din $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C_{3,\alpha}(\Omega)$ a ecuației (5.3.27), nulă pe frontieră, avem

$$u(x,y,\tau)\geqslant 0 \tag{5.3.31}$$

pentru orice punct $(x,y)\in\bar{\Omega}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține limitarea superioară a lui $u(x, y, \tau)$, pentru orice τ fixat în $[0.1]$, vom face următoarele considerații.

Să observăm mai întîi că ecuația (5.3.27) este uniform eliptică pentru $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, căci forma

$$K(\xi, \eta) = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

are ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + C)\lambda - (B^2 - AC) = 0, \qquad (*)$$

cu soluțiile

$$\lambda_1 = 1 + \tau(f(\tau_0^2) - 1), \quad \lambda_2 = 1 + \tau\left(\frac{d\gamma_0}{d\tau_0} - 1\right) \qquad (5.3.32)$$

Ținînd seama că

$$\frac{d\gamma_0}{d\tau_0} = f(\tau_0^2) + 2\tau_0^2 f'(\tau_0^2)$$

precum și de condițiile impuse lui f (vezi (5.3.12), (5.3.13)), din (5.3.32) rezultă:

$$\min(1, \alpha_1) \leqslant \min(1, f(\tau_0^2)) \leqslant \lambda_1 = (1 - \tau) + \tau f(\tau_0^2) \leqslant$$

$$\leqslant \max(1, f(\tau_0^2)) \leqslant \max(1, \alpha_2)$$

$$\min(1, \beta_1) \leqslant \min\left(1, \frac{d\gamma_0}{d\tau_0}\right) \leqslant \lambda_2 = (1 - \tau) + \frac{d\gamma_0}{d\tau_0} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(1, \frac{d\gamma_0}{d\tau_0}\right) \leqslant \max(1, \beta_2)$$

deci

$$\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \min(1, \alpha_1, \beta_1) = L > 0. \qquad (5.3.33)$$

Să mai observăm următoarele (vezi (5.3.28)):

$$A = (1 - \tau) + \tau f(\tau_0^2) + \frac{2}{3}\tau f'(\tau_0^2)\, p^2 = \lambda_1 + \frac{2}{3}\tau f'(\tau_0^2)\, p^2$$

$$C = (1 - \tau) + \tau f(\tau_0^2) + \frac{2}{3}\tau f'(\tau_0^2)\, q^2 = \lambda_1 + \frac{2}{3}\tau f'(\tau_0^2)\, q^2 \qquad (5.3.33)'$$

deci

$$A + C = 2\lambda_1 + \frac{2}{3}\tau f'(\tau_0^2)(p^2 + q^2). \tag{5.3.34}$$

Pe de altă parte, din ecuaţia caracteristică (*) rezultă:

$$A + C = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{5.3.35}$$

Din (5.3.34) şi (5.3.35) rezultă

$$\frac{2}{3}f'(\tau_0^2)(p^2 + q^2) = \lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{d\gamma_0}{d\tau_0} - f(\tau_0^2)\right). \tag{5.3.36}$$

Să considerăm un material ecruisabil monoton şi a cărui curbă caracteristică la încărcare nu are puncte de întoarcere. Această presupunere fixează cadrul mecanic în care vom obţine teorema de existenţă. Pentru un asemenea material, avem (vezi figura 1, reprodusă după Rabotnov [55]):

$$\operatorname{tg}\alpha \geqslant \operatorname{tg}\beta \geqslant \operatorname{tg}\gamma,$$

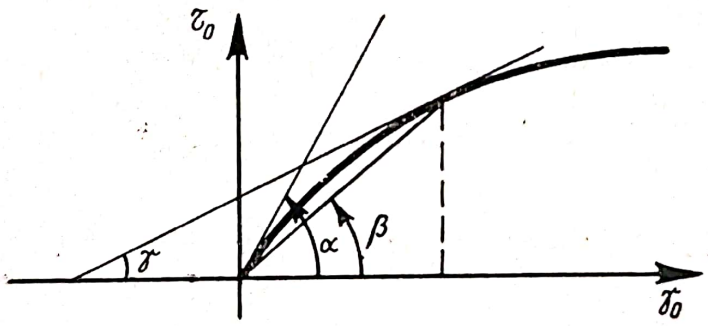

Fig. 1

deci

$$G \geqslant \frac{\tau_0}{\gamma_0} = g(\gamma_0^2) \geqslant \frac{d\tau_0}{d\gamma_0}, \tag{5.3.37}$$

unde G este modulul elastic de forfecare.

Din (5.3.37) rezultă

$$\frac{d\gamma_0}{d\tau_0} \geqslant \frac{1}{g(\gamma_0^2)}$$

care, ţinînd seama că $g(\gamma_0^2)f(\tau_0^2) = 1$, se mai scrie

$$\frac{d\gamma_0}{d\tau_0} \geqslant f(\tau_0^2). \tag{5.3.38}$$

Comparînd (5.3.38) cu (5.3.36) rezultă

$$f'(\tau_0^2) \geqslant 0. \tag{5.3.39}$$

Din (5.3.39), (5.3.33)', (5.3.33) rezultă :

$$A,\ C \geqslant \lambda_j \geqslant \min(1,\ \alpha_1,\ \beta_j) = L > 0. \tag{5.3.40}$$

Fie acum, pentru fiecare τ fixat în $[0,\ 1]$, funcția

$$(x,\ y) \in \bar{\Omega}, \qquad (x,\ y) \to \tilde{u}(x,\ y,\ \tau) = u(x,\ y,\ \tau) + \frac{2\omega}{L} e^{x+d}, \tag{5.3.41}$$

unde d este diametrul lui Ω.

Funcția $\tilde{u}$ astfel definită nu posedă puncte de maxim în Ω. Într-adevăr, dacă un asemenea punct ar exista, atunci într-un asemenea punct am avea :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\omega}{L} e^{x+d} = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{5.3.42}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\omega}{L} e^{x+d} < 0, \qquad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0. \tag{5.3.43}$$

Ținînd seama de (5.3.42) și (5.3.43) în ecuația (5.3.27), se obține

$$A\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{2\omega}{L} e^{x+d}\right) + C\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + 2\omega = 0$$

sau

$$A\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 2\omega\left(\frac{A}{L} e^{x+d} - 1\right). \tag{5.3.44}$$

Egalitatea (5.3.44) este însă imposibilă.

Într-adevăr, ținînd seama de (5.3.40) și (5.3.43) rezultă că membrul stîng al acestei egalități este negativ, în timp ce din (5.3.40) și din faptul că $\omega > 0$, rezultă că membrul drept este pozitiv.

Așadar, funcția $\tilde{u}$ își poate atinge maximul numai pe $\dot{\Omega}$. Fie $(x_0,\ y_0)$ un punct din $\dot{\Omega}$ în care $\tilde{u}$ își atinge maximul. Ținînd seama că pe Ω, u este nulă, avem (cu τ fixat în $[0,1]$) :

$$\max_{(x,\ y) \in \bar{\Omega}} \tilde{u}(x,\ y,\ \tau) = \tilde{u}(x_0,\ y_0,\ \tau) = \frac{2\omega}{L} e^{x_0+d} \leqslant \frac{2\omega}{L} e^{2d}. \tag{5.3.45}$$

Din (5.3.41) și (5.3.45) rezultă

$$(x, y) \in \bar{\Omega}, \qquad u(x, y, \tau) + \frac{2\omega}{L} e^{x+d} \leqslant \frac{2\omega}{L} e^{2d}$$

deci

$$u(x, y, \tau) \leqslant \frac{2\omega}{L} e^{2d}. \tag{5.3.46}$$

Din (5.3.31) și (5.3.3.46) rezultă că

$$\max_{(x, y)\in\Omega} |u(x, y, \tau)| \leqslant \frac{2\omega}{L} e^{2d}$$

și cum τ a fost arbitrar în [0.1], demonstrația este încheiată. Din teoremele 5.3.1 și 5.3.2 rezultă următoarea teoremă:

TEOREMA 5.3.3. *Dacă funcția materială f a teoriei Hencky-Nadai satisface în afara condițiilor* (5.3.12), (5.3.13), *și condițiile teoremei* 5.3.2 *și dacă $\dot{\Omega} \in C_{2,\alpha}$, atunci există cel puțin o soluție a problemei torsiunii în teoria Hencky-Nadai care aparține spațiului $C_{3,\alpha}(\Omega) \cap C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

Rezultatele care urmează au drept scop să furnizeze și unicitatea soluției.

TEOREMA 5.3.4. *Fie $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor din $C_{2,0}(\bar{\Omega})$ care satisfac la frontieră condiția $u|_{\dot{\Omega}} = 0$. Dacă $f \in C^{(2)}[0, \infty)$ și satisface condițiile* (5.3.12), (5.3.13), *atunci operatorul torsiunii elasto-plastice*

$$Pu = \sum_{i=1}^{2} -\frac{\partial}{\partial x_i} [f(T(\operatorname{grad} u))\, p_i] \tag{5.3.47}$$

considerat de la $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$ în $L_2(\Omega)$ este strict monoton în sensul lui Minty-Browder pe $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$.

Demonstrație. Rezultă din teorema 5.1.4.3, comparînd definițiile lui $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$ și $\Phi^{(2)}(\Omega)$.

TEOREMA 5.3.5. *În condițiile teoremei* 5.3.4, *dacă există o soluție a ecuației* (5.3.10) *care se găsește în $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$, această soluție este unică.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 5.3.4.

Teoremele (5.3.3) și (5.3.5) permit să enunțăm următoarea teoremă:

TEOREMA 5.3.6. *Dacă funcția materială f a teoriei Hencky-Nadai satisface condițiile impuse de teoremele* 5.3.2 *și* 5.3.4, *și dacă $\dot{\Omega} \in C_{2,\alpha}$, atunci există o soluție unică a problemei torsiunii elasto-plastice, care aparține spațiului $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C_{3,\alpha}(\Omega)$.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Este suficient să remarcăm următoarele: teorema 5.3.3 dă existența în $C_{3,\alpha}(\Omega)\cap C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ a unei soluții a ecuației (5.3.10) care satisface la frontieră condiția $u|_{\dot{\Omega}} = 0$. Dar, orice soluție a ecuației (5.3.10) care se găsește în $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ și satisface $u|_{\dot{\Omega}} = 0$, aparține lui $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$. După teorema 5.3.5, însă, dacă ecuația (5.3.10) posedă o soluție în $C^0_{2,0}(\bar{\Omega})$, această soluție este unică.

Remarcă. Este bine cunoscut faptul că dacă în teoria de plasticitate a lui Hencky-Nadai se consideră numai cazul încărcării (cum am făcut în toate considerațiile anterioare), atunci, formal, această teorie reprezintă o teorie elastică neliniară.

Problema existenței și unicității soluției problemei torsiunii unui material elasto-plastic cu stratul plastic definit de o condiție von Mises, a făcut obiectul lucrărilor lui Lanchon și Duvaut [41] și de asemenea unei serii de lucrări ale lui T. W. Ting [64 a]—[64 c].

§ 5.4. Rolul teoremelor de existență în obținerea unor rezultate calitative în teoria Hencky-Nadai

Rezultatele care urmează au scopul de a ilustra următoarea idee: demonstrarea unor teoreme de existență în teoria Hencky-Nadai permite obținerea unor rezultate calitative importante din punct de vedere mecanic. Vom ilustra această idee pe cazul torsiunii în teoria Hencky-Nadai [42 b].

În tot ceea ce urmează ne plasăm în ipotezele care au permis să demonstrăm că problema torsiunii elasto-plastice în teoria Hencky-Nadai (problema (5.3.10), (5.3.11)) posedă o soluție în $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C_{3,\alpha}(\Omega)$.

1. Despre valoarea maximă a intensității tensiunilor tangențiale

Fie $u(x, y)$ o soluție din $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C_{3,\alpha}(\Omega)$ a problemei (5.3.10), (5.3.11).

Am demonstrat atunci că intensitatea tensiunilor tangențiale este (a se vedea (5.1.4.37)):

$$\tau_0^2 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{1}{3}(\text{grad } u)^2. \tag{5.4.1}$$

Vom demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 5.4.1. *În problema torsiunii elasto-plastice (teoria Hencky-Nadai) intensitatea tensiunilor tangențiale nu are nici un punct de maxim în* Ω.

Observație. Este evidentă importanța din punct de vedere mecanic a acestei teoreme. Ea afirmă în fond că în problema torsiunii elasto-plastice, în teoria Henchy-Nadai, punctele de maxim ale intensității tensiunilor tangențiale, deci punctele cele mai periclitate, sînt pe frontieră.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de (5.4.1), va fi suficient să demonstrăm că dacă u este o soluţie din $C_{3,\alpha}(\Omega)$ a problemei (5.3.10), (5.3.11), atunci $T = (\text{grad } u)^2$ nu are puncte de maxim în Ω.

Fie că un asemenea punct ar exista în Ω.

Atunci, într-un asemenea punct, am avea, evident,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{5.4.2}$$

Cu notaţiile (5.3.28), relaţiile (5.4.2) se scriu

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial x} = pr + qs = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial y} = ps + qt = 0 \tag{5.4.2'}$$

Pe de altă parte, $u \in C_{3,\alpha}(\Omega)$ fiind soluţie a ecuaţiei (5.3.27), avem

$$Pu = Ar + 2Bs + Ct = -2\omega. \tag{5.4.3}$$

Din (5.4.2)' şi (5.4.3) rezultă :

$$r = \frac{-2\omega q^2}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2},$$

$$s = \frac{2\omega pq}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2}, \tag{5.4.4}$$

$$t = \frac{-2\omega p^2}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2}.$$

Pe de altă parte, în punctul de maxim pe care l—am presupus ca existînd în Ω, am avea de asemenea :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} < 0, \tag{5.4.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar din condiția de uniform elipticitate a ecuației (5.4.3),

$$|B| < \sqrt{AC}. \tag{5.4.6}$$

Reamintim de asemenea că am arătat că

$$A > 0, \qquad C > 0.$$

Fie

$$2K = A\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5.4.7}$$

Avem, evident:

$$2K \leqslant A\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2|B|\left|\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right| + C\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} <$$

$$< A\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\sqrt{A}\sqrt{C}\sqrt{\left|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|}\cdot\sqrt{\left|\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|} + C\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|\right) + C\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left|\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|\right) = 0$$

unde am ținut seama de (5.4.5), (5.4.6), (5.4.7).

Așadar, dacă ar exista un punct de maxim în Ω pentru intensitatea tensiunilor tangențiale în problema torsiunii din teoria Hencky-Nadai, atunci, într-un asemenea punct, K dat de (5.4.7) satisface la

$$K < 0. \tag{5.4.8}$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial x} = pr + qs$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial y} = ps + qt$$

de unde

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = p\frac{\partial r}{\partial x} + r^2 + q\frac{\partial s}{\partial x} + s^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = p\frac{\partial s}{\partial y} + s^2 + q\frac{\partial t}{\partial y} + t^2, \tag{5.4.9}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = p\frac{\partial r}{\partial y} + rs + q\frac{\partial s}{\partial y} + st.$$

Ţinînd seama de (5.4.9), în (5.4.7), se obţine

$$K = A\left(p\frac{\partial r}{\partial x} + q\frac{\partial s}{\partial x}\right) + 2B\left(p\frac{\partial r}{\partial y} + q\frac{\partial s}{\partial y}\right) + C\left(p\frac{\partial s}{\partial y} + q\frac{\partial t}{\partial y}\right) +$$

$$+ A(r^2 + s^2) + 2Bs(r + t) + C(s^2 + t^2). \tag{5.4.10}$$

Dar, din faptul că

$$Pu = 2\omega,$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x}(Pu) = 0\,; \qquad \frac{\partial}{\partial y}(Pu) = 0$$

şi deci

$$0 = p\frac{\partial}{\partial x}(Pu) + q\frac{\partial}{\partial y}(Pu). \tag{5.4.11}$$

Pe de altă parte,

$$Pu = Ar + 2Bs + Ct$$

şi deci

$$\frac{\partial}{\partial x}(Pu) = A\frac{\partial r}{\partial x} + r\frac{\partial A}{\partial x} + 2B\frac{\partial s}{\partial x} + 2s\frac{\partial B}{\partial x} + C\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x}t,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Pu) = A\frac{\partial r}{\partial y} + r\frac{\partial A}{\partial y} + 2B\frac{\partial s}{\partial y} + 2s\frac{\partial B}{\partial y} + C\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial y}t. \tag{5.4.12}$$

Din (5.4.12) şi (5.4.11) rezultă

$$0 = A\left(p\frac{\partial r}{\partial x} + q\frac{\partial r}{\partial y}\right) + 2B\left(p\frac{\partial s}{\partial x} + q\frac{\partial s}{\partial y}\right) + C\left(p\frac{\partial t}{\partial x} + q\frac{\partial t}{\partial y}\right) +$$

$$+\left\{r\left(p\frac{\partial A}{\partial x} + q\frac{\partial A}{\partial y}\right) + 2s\left(p\frac{\partial B}{\partial x} + q\frac{\partial B}{\partial y}\right) + t\left(p\frac{\partial C}{\partial x} + q\frac{\partial C}{\partial y}\right)\right\} \tag{5.4.13}$$

Suma care este cuprinsă între parantezele mari, este însă nulă. Într-adevăr, avem (atragem atenția ca în cazul ecuației torsiunii elasto-plastice în teoria Hencky-Nadai, A, B, C sînt funcții numai de $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ și $q = \frac{\partial u}{\partial y}$):

$$p\frac{\partial A}{\partial x} + q\frac{\partial A}{\partial y} = p\left(\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}\right) = \tag{5.4.14}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial p}(pr + qs) + \frac{\partial A}{\partial q}(ps + qt).$$

Ținînd seama de (5.4.2)′ în (5.4.14) rezultă

$$p\frac{\partial A}{\partial x} + q\frac{\partial A}{\partial y} = 0. \tag{5.4.15}$$

Analog se obține

$$p\frac{\partial B}{\partial x} + q\frac{\partial B}{\partial y} = 0, \qquad p\frac{\partial C}{\partial x} + q\frac{\partial C}{\partial y} = 0. \tag{5.4.16}$$

Ținînd seama de (5.4.15) și (5.4.16) în (5.4.13), rezultă

$$0 = A\left(p\frac{\partial r}{\partial x} + q\frac{\partial r}{\partial y}\right) + 2B\left(p\frac{\partial s}{\partial x} + q\frac{\partial s}{\partial y}\right) + C\left(p\frac{\partial t}{\partial x} + q\frac{\partial t}{\partial y}\right). \tag{5.4.17}$$

Din (5.4.17) și (5.4.10) rezultă

$$K = A(r^2 + s^2) + 2Bs(r + t) + C(s^2 + t^2) \tag{5.4.18}$$

iar din (5.4.18) și (5.4.4) rezultă (f fiind funcția materială a teoriei Hencky-Nadai):

$$K = \frac{4\omega^2(p^2 + q^2)}{[f + 2f'p^2]\,q^2 - 4f'p^2q^2 + [f + 2f'q^2]p^2} = \frac{4\omega^2}{f} > 0 \tag{5.4.19}$$

ceea ce contrazice (5.4.8).

2. Proprietăți de monotonie ale momentului de torsiune

Vom demonstra următoarea teoremă (cu semnificație fizică imediată):

TEOREMA 5.4.2. *În problema torsiunii elasto-plastice (teoria Hencky-Nadai), momentul de torsiune*

$$\mathcal{M} = \int_\Omega (\sigma_{32}x - \sigma_{31}y)\, d\Omega \tag{5.4.20}$$

este funcție strict crescătoare de torsiunea pe unitatea de lungime, ω.

Demonstrație. Fie ω_1 și ω_2 două valori ale constantei ω și u_1 respectiv u_2 soluțiile (unice pentru fiecare caz) din $C_{2,0}(\bar{\Omega})$ și nule la frontieră, deci din $C^{(0)}_{2,0}(\bar{\Omega})$, ale ecuațiilor

$$Pu = 2\omega_1,$$

$$Pu = 2\omega_2.$$

Fie $Q : C^0_{2,0}(\bar{\Omega}) \to L_2(\Omega)$, după cum urmează

$$w \in C^0_{2,0}(\bar{\Omega}), \qquad Qw = P(u_1 + w) - Pu_1 \tag{5.4.21}$$

Este ușor de văzut că

$$Q(0) = 0 \tag{5.4.22}$$

și că

$$(DQ)(w)\cdot h = (DP)(u_1 + w)\cdot h, \qquad w, h \in C^0_{2,0}(\bar{\Omega}). \tag{5.4.23}$$

Utilizînd formula (2.3.11) și ținînd seama de (5.4.22) și (5.4.23), avem

$$\langle Qw, w\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle Qw - Q0,\ w - 0\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_0^1 \langle (DQ)(tw)\cdot w, w\rangle_{L_2(\Omega)}\, dt = \tag{5.4.24}$$

$$= \int_0^1 \langle (DP)(u_1 + tw)\cdot w, w\rangle_{L_2(\Omega)}\, dt \geqslant \gamma^2 \|w\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Din (5.4.24) rezultă în particular că

$$\langle Q(u_2 - u_1),\ u_2 - u_1\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \gamma^2 \|u_2 - u_1\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{5.4.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, ținînd seama de (5.4.21), (5.4.25), se scrie:

$$\langle Pu_2 - Pu_1,\ u_2 - u_1\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle 2\omega_2 - 2\omega_1,\ u_2 - u_1\rangle_{L_2(\Omega)} = \tag{5.4.26}$$

$$= 2(\omega_2 - \omega_1)\int_\Omega (u_2 - u_1)\mathrm{d}\Omega \geqslant \gamma^2 \|u_2 - u_1\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Pe de altă parte, fie $\sigma_{31}^{(1)}$, $\sigma_{32}^{(1)}$ valorile tensiunilor tangențiale corespunzătoare soluției u_1 a ecuației $Pu = 2\omega_1$, $u|_{\dot\Omega} = 0$ și

$$\mathcal{M}(\omega_1) = \int_\Omega (x\sigma_{32}^{(1)} - y\sigma_{31}^{(1)})\,\mathrm{d}\Omega.$$

Fie în mod analog

$$\mathcal{M}(\omega_2) = \int_\Omega (x\sigma_{32}^{(2)} - y\sigma_{31}^{(2)})\,\mathrm{d}\Omega.$$

Avem

$$\mathcal{M}(\omega_2) - \mathcal{M}(\omega_1) = \int_\Omega [x(\sigma_{32}^{(2)} - \sigma_{32}^{(1)}) - y(\sigma_{31}^{(2)} - \sigma_{31}^{(1)})]\,\mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left[-x\frac{\partial}{\partial x}(u_2 - u_1) - y\frac{\partial}{\partial y}(u_2 - u_1)\right]\mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x(u_2 - u_1)) + \frac{\partial}{\partial y}(-y(u_2 - u_1))\right]\mathrm{d}\Omega + 2\int_\Omega (u_2 - u_1)\,\mathrm{d}\Omega.$$

Așadar,

$$2\int_\Omega (u_2 - u_1)\,\mathrm{d}\Omega = \mathcal{M}(\omega_2) - \mathcal{M}(\omega_1). \tag{5.4.27}$$

Din (5.4.26) și (5.4.27) rezultă

$$(\mathcal{M}(\omega_2) - \mathcal{M}(\omega_1))(\omega_2 - \omega_1) \geqslant \gamma^2 \|u_2 - u_1\|^2_{L_2(\Omega)} > 0 \tag{5.4.28}$$

care probează monotonia lui $\mathcal{M}$ ca funcție de ω.

TEOREMA 5.4.3. *Momentul de torsiune este funcție lipschitziană de* ω.

Demonstrație. Din (5.4.27) rezultă:

$$|\mathcal{M}(\omega_2) - \mathcal{M}(\omega_1)|^2 = 4\left|\int_\Omega (u_2 - u_1)\,\mathrm{d}\Omega\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_\Omega (u_2 - u_1)^2\,\mathrm{d}\Omega \cdot (\mathrm{mes}\ \Omega) = 4(\mathrm{mes}\ \Omega)\,\|u_2 - u_1\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{5.4.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (5.4.29) şi (5.4.28) rezultă

$$|\mathcal{M}(\omega_2) - \mathcal{M}(\omega_1)|^2 \leqslant \frac{4(\text{mes }\Omega)}{\gamma^2} |\omega_2 - \omega_1| |\mathcal{M}(\omega_2) - \mathcal{M}(\omega_1)|, \quad (5.4.30)$$

unde am ţinut seama că $(\mathcal{M}(\omega_2) - \mathcal{M}(\omega_1))(\omega_2 - \omega_1) > 0$. Din (5.4.30) rezultă următoarea condiţie Lipschitz pentru :

$$|\mathcal{M}(\omega_2 - \mathcal{M}(\omega_1)| \leqslant \frac{4(\text{mes }\Omega)}{\gamma^2} |\omega_2 - \omega_1|. \quad (5.4.31)$$

Următoarea teoremă are scopul de a preciza tipul de monotonie al lui ω.

TEOREMA 5.4.4. *Momentul de torsiune este funcţie strict crescătoare de* ω, *satisfăcînd la* $\mathcal{M}(\omega) > C\omega$, $C = const. > 0$.

Demonstraţie. Fie u_1 soluţia problemei

$$\Delta u_1 = -2 \quad (5.4.32)$$

$$u_1|_{\dot{\Omega}} = 0 \quad (5.4.33)$$

şi fie

$$u_\omega = +\omega u_1. \quad (5.4.34)$$

Atunci problema torsiunii în teoria Hencky-Nadai se scrie :

$$Pu = -\Delta u_\omega \quad (5.4.35)$$

$$u|_{\dot{\Omega}} = 0 \quad (5.4.36)$$

Din (5.4.35) rezultă

$$\langle u_\omega, Pu\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle u_\omega, -\Delta u_\omega\rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (5.4.36)$$

Dar

$$Pu = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f(\tau_0^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[f(\tau_0^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

şi deci

$$\langle u_\omega, Pu\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left\{-u_\omega \frac{\partial}{\partial x}\left[f(\tau_0^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - u_\omega \frac{\partial}{\partial y}\left[f(\tau_0^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\} d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left[u_\omega f(\tau_0^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[u_\omega f(\tau_0^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\} +$$

$$+ \int_\Omega f(\tau_0^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_\omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_\omega}{\partial y}\right) d\Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd formula lui Green pentru prima integrală și ținînd seama că $u_\omega|_\Omega = 0$, rezultă

$$\langle u_\omega, Pu\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f(\tau_0^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_\omega}{\partial y}\right) d\Omega =$$

$$= \int_\Omega f(\tau_0^2)\ \text{grad}\ u\ \text{grad}\ u_\omega\ d\Omega. \tag{5.4.37}$$

Cu o tehnică analoagă se obține imediat că

$$\langle u_\omega, -\Delta u_\omega\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega (\text{grad}\ u_\omega)^2\ d\Omega \tag{5.4.38}$$

astfel că (5.4.36) se scrie

$$\int_\Omega (\text{grad}\ u_\omega)^2\ d\Omega = \int_\Omega f(\tau_0^2)\ \text{grad}\ u\ \text{grad}\ u_\omega\ d\Omega \tag{5.4.39}$$

Dar, ținînd seama de condițiile impuse funcției materiale f, avem:

$$\int_\Omega f(\tau_0^2)\ \text{grad}\ u\ \text{grad}\ u_\omega\ d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1\left[\int_\Omega (\text{grad}\ u)^2\ d\Omega\right]^{1/2}\left[\int_\Omega (\text{grad}\ u_\omega)^2\ d\Omega\right]^{1/2}, \tag{5.4.40}$$

Din (5.4.39) și (5.4.40) rezultă

$$\int_\Omega (\text{grad}\ u_\omega)^2\ d\Omega \leqslant \alpha_1^2 \int_\Omega (\text{grad}\ u)^2\ d\Omega. \tag{5.4.41}$$

Dar, se știe că în teoria Hencky-Nadai, dependența tensiunii tangențiale octaedrice de alunecarea octaedrică este

$$\tau_0 = g(\gamma_0^2)\,\gamma_0$$

sau, în condițiile pe care le-am formulat pentru g,

$$\gamma_0 = f(\tau_0^2)\,\tau_0$$

astfel că avem

$$g(\gamma_0^2)\,f(\tau_0^2) = 1.$$

Pentru g am impus condiția $g(\tau_0^2) < M$, $M = \text{const.} > 0$, astfel că

$$\frac{1}{g(\tau_0^2)} = f(\tau_0^2) > \frac{1}{M} \quad \text{sau} \quad Mf(\tau_0^2) > 1.$$

Această ultimă inegalitate ne permite să scriem

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega < M \int_\Omega f(\tau_0^2) (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega. \tag{5.4.42}$$

Din (5.4.41) și (5.4.42), rezultă

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u_\omega)^2 \, d\Omega < M\alpha_1^2 \int_\Omega f(\tau_0^2) (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \tag{5.4.43}$$

Să observăm acum următoarele: dacă în (5.4.37) se înlocuiește u_ω cu u, rezultă

$$\langle u, Pu \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f(\tau_0^2) (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \tag{5.4.44}$$

Pe de altă parte, deoarece $Pu = 2\omega$, avem

$$\langle u, Pu \rangle = 2\omega \int_\Omega u \, d\Omega. \tag{5.4.45}$$

De asemenea, avem

$$\mathcal{M}(\omega) = \int_\Omega (x\sigma_{32} - y\sigma_{31}) \, d\Omega = \int_\Omega \left(-x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left[-\frac{\partial}{\partial x}(xu) - \frac{\partial}{\partial y}(yu) \right] d\Omega + 2\int_\Omega u \, d\Omega = 2\int_\Omega u \, d\Omega. \tag{5.4.46}$$

Din (5.4.44), (5.4.45), (5.4.46) rezultă

$$\mathcal{M}(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_\Omega f(\tau_0^2) (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \tag{5.4.47}$$

iar din (5.4.47) și (5.4.43) rezultă

$$\mathcal{M}(\omega) > \frac{1}{\omega} \frac{1}{M\alpha_1^2} \int_\Omega (\operatorname{grad} u_\omega)^2 \, d\Omega = \omega \frac{1}{M\alpha_1^2} \int_\Omega (\operatorname{grad} u_1)^2 \, d\Omega = C\omega,$$

Așadar,

$$\mathcal{M}(\omega) > C\omega, \quad C = \frac{1}{M\alpha_1^2} \int_\Omega (\operatorname{grad} u_1)^2 \, d\Omega = \text{const.} > 0. \tag{5.4.48}$$

inegalitate care demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Cîteva idei privind utilizarea spaţiilor Orlicz în probleme de regularizare pentru soluţiile generalizate în sens Sobolev ale unor probleme din teoria plasticităţii

§ 6.1. Cîteva idei privind teoremele de regularizare pentru soluţiile generalizate în teoria Hencky-Nadai

După cum am remarcat deja, teorema variaţională a lui Langenbach reduce rezolvarea primei probleme fundamentale a teoriei Hencky-Nadai cît şi a altor probleme particulare ale acestei teorii (vezi problema torsiunii, problema încovoierii plăcilor elasto-plastice etc.) la găsirea minimului unor funcţionale de aceeaşi formă pe mulţimi de funcţii suficient de regulate şi satisfăcînd condiţii la limită liniare şi omogene, mulţimi ce sînt subspaţii dense ale lui $L_2(\Omega)$ sau $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Faptul că aceste funcţionale posedă anumite proprietăţi ce depind numai de funcţia materială a teoriei Hencky-Nadai, permite o analiză unitară a metodelor de construcţie a soluţiilor în sens Sobolev pentru problemele respective precum şi a proprietăţilor de regularitate ale acestor soluţii.

Studiul proprietăţilor de regularitate pentru soluţiile generalizate în sens Sobolev se impune pentru că, aşa cum am văzut, din teorema lui Langenbach nu rezultă, în general, că ele fac parte din mulţimea funcţiilor admisibile ale problemelor la limită considerate (atunci ele ar fi soluţii exacte), ci din $L_2(\Omega)$ sau $\mathbf{L}_2(\Omega)$ în care aceste mulţimi de funcţii sînt dense.

Fără a specifica în mod expres acest lucru, pe parcursul lucrării au fost date asemenea teoreme care să caracterizeze regularitatea soluţiilor generalizate după Sobolev ale problemelor la limită considerate.

Astfel au fost teoremele privind apartenenţa soluţiilor generalizate la spaţiile energetice ale operatorilor (DP) (0), P fiind operatorul problemei la limită considerată (a se vedea teoremele 5.1.1.3, 5.1.5.3). Pe aceste spaţii, normele sînt echivalente cu normele din $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ (prima problemă fundamentală a teoriei Hencky-Nadai [24 f] sau $W_2^{(2)}(\Omega)$, (problema încovoierii plăcilor încastrate) (a se vedea Mihlin [47 b], p. 334).

Acelaşi scop l-a avut construcţia de extindere a funcţionalei teoriei Hencky-Nadai (vezi subparagraful 5.1.7) la o funcţională definită pe un spaţiu, $\overline{W}_2^{(1)}(\Omega)$, a cărui normă este echivalentă cu norma din $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

Lui Langenbach [42 d] îi aparţine ideea utilizării spaţiilor Orlicz în vederea obţinerii de noi rezultate privind regularitatea soluţiilor generalizate pentru probleme la limită ale teoriei Hencky-Nadai. După cum vom vedea, proprietăţile impuse funcţiei materiale a teoriei Hencky-Nadai permit introducerea în mod natural a spaţiilor Orlicz în studiul problemei ce ne interesează.

Principalele rezultate privind spaţiile Orlicz pe care le vom folosi sînt expuse (în general fără demonstraţii) după monografia lui Krasnoselski şi Rutiţki [39]. Cititorul interesat poate consulta de asemenea lucrările lui N. Dinculeanu [25 a], [25 b], [25 c].

§ 6.2. N-funcţii

1. *Funcţii convexe.* DEFINIŢIA 6.2.1. O funcţie reală de variabilă reală, M, se numeşte convexă dacă pentru oricare două valori u_1 şi u_2 ale argumentului, este îndeplinită condiţia

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right]. \tag{6.2.1}$$

Dacă în (6.2.1) egalitatea are loc numai pentru $u_1=u_2$, M se zice strict convexă.

În cele ce urmează vom considera numai funcţii convexe care sînt şi continue.

Figura 2 furnizează interpretarea geometrică a condiţiei (6.2.1).

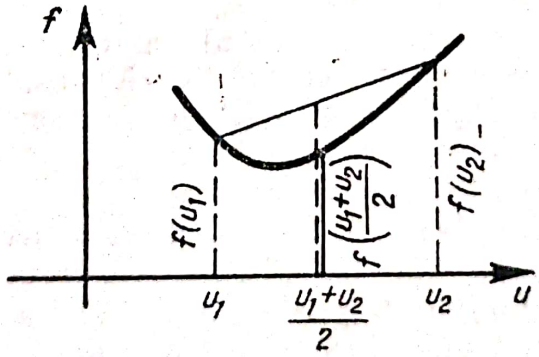

Fig. 2

Evident, condiţia (6.2.1) se mai scrie

$$M(u_1)+M(u_2)-2M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\geqslant 0 \tag{6.2.1}'$$

și ca explică de unde vine ideea de a pune definiția pentru funcționale convexe.

TEOREMA 6.2.1. *Dacă M satisface condiția* (6.2.1), *atunci*

$$M[\alpha u_1 + (1-\alpha)\, u_2] \leqslant \alpha M(u_1) + (1-\alpha)\, M(u_2) \tag{6.2.2}$$

pentru orice $\alpha \in [0,1]$.

Demonstrație. Fie f funcția definită pe $[0,1]$ astfel:

$$\alpha \in [0,1],\ \alpha \xrightarrow{f} M[\alpha u_1 + (1-\alpha)\, u_2] - \alpha M(u_1) - (1-\alpha)\, M(u_2). \tag{6.2.3}$$

Să presupunem că ar exista valori ale lui α pe $[0,1]$ pentru care nu este îndeplinită inegalitatea (6.2.2), ci inegalitatea contrară

$$M[\alpha u_1 + (1-\alpha)\, u_2] > \alpha M(u_1) + (1-\alpha) M(u_2), \tag{6.2.4}$$

ceea ce, ținînd seama de (6.2.3), revine la a spune că există valori ale lui α pe $[0,1]$ pentru care $f(\alpha) > 0$.

Fie M_0 cea mai mare valoare a lui f pe $[0,1]$ și fie α_0 cea mai mică valoare a lui α pentru care această valoarea este atinsă:

$$f(\alpha_0) = M([\alpha_0 u_1 + (1-\alpha_0) u_2] - \alpha_0 M(u_1) - (1-\alpha_0)\, M(u_2) = M_0.$$

Evident, $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 \neq 1$, căci $f(0) = f(1) = 0$, or f are și valori strict mai mari ca zero pe $[0,1]$.

Așadar, $0 < \alpha_0 < 1$. Există deci $\delta > 0$ astfel încît $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta] \subset [0,1]$ și astfel încît în $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ să nu se mai găsească nici un alt punct care să realizeze maximul lui f pe $[0,1]$. Scriind inegalitatea (6.2.1) pentru

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)\, u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)\, u_2$$

$$u_2^* = (\alpha_0 + \delta)\, u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)\, u_2$$

și ținînd seama de (6.2.3), rezultă

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0$$

ceea ce contrazice faptul că $f(\alpha_0) = M_0$.

LEMA 6.2.1. *Dacă M este continuă și convexă, atunci M are în orice punct u derivata la dreapta $(p_+(u))$ și derivată la stînga $(p_-(u))$ și*

$$p_-(u) \leqslant p_+(u). \tag{6.2.5}$$

În cele ce urmează un rol important va juca următoarea teoremă de reprezentare a funcţiilor convexe.

TEOREMA 6.2.2. *Orice funcţie convexă M, care satisface condiţia $M(a) = 0$, se reprezintă sub forma*

$$M(u) = \int_a^u p(t)\,dt \tag{6.2.6}$$

unde p este nedescrescătoare şi continuă la dreapta.

A. *N*-funcţii

DEFINIŢIA 6.2.2. Funcţia M se numeşte o N-funcţie dacă se reprezintă sub forma

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\,dt \tag{6.2.7}$$

unde p are următoarele proprietăţi:

a) p este continuă la dreapta şi nedescrescătoare pentru $t \geqslant 0$;

b) $p(0) = 0$; $p(t) > 0$, $t > 0$; $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$.

Iată două exemple de N-funcţii:

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}\ (\alpha > 1); \quad M_2(u) = e^{u^2} - 1.$$

Pentru prima, p este definit de $p_1(t) = t^{\alpha-1}$, $t \geqslant 0$, iar pentru a doua, $p_2(t) = 2t\,e^{t^2}$, $t \geqslant 0$. Se verifică imediat că p_1 şi p_2 au proprietăţile impuse de definiţia 6.2.2.

Cele mai importante proprietăţi ale N-funcţiilor sînt următoarele:

a) orice N-funcţie este convexă;

b) orice N-funcţie este pară, continuă, ia în zero valoarea zero şi creşte pentru valori pozitive ale argumentului.

Aceste ultime proprietăţi rezultă imediat din reprezentarea (6.2.7).

B. *N*-funcţii complementare

DEFINIŢIA 6.2.3. Fie p definită pentru $t \geqslant 0$ şi satisfăcînd condiţiile impuse de definiţia 6.2.2. Funcţia q definită pentru $s \geqslant 0$, după cum urmează

$$q(s) = \sup_{p(t)\leqslant s} t, \tag{6.2.8}$$

are aceleași proprietăți ca p, deci cu ajutorul funcției q se poate defini o N-funcție după reprezentarea (6.2.7).

Funcțiile M și N definite după cum urmează

$$u \xrightarrow{M} \int_0^{|u|} p(t)\,dt$$
$$v \xrightarrow{N} \int_0^{|v|} q(s)\,ds \tag{6.2.9}$$

se numesc N-funcții complementare.

Să remarcăm că deoarece $p(t) \to \infty$ cu $t \to \infty$, oricare ar fi $s \geqslant 0$, $\{t/p(t) \leqslant s\}$ este mărginită, deci definiția funcției q are sens.

Exemplu de N-funcții complementare

Fie $p(t) = t^{\alpha-1}$, $t \geqslant 0$, $\alpha > 1$. Este evident că p satisface condițiile impuse de definiția 6.2.2, iar N-funcția generată de p este

$$u \xrightarrow{M} M(u) = \int_0^{|u|} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}. \tag{6.2.10}$$

Fie

$$q(s) = \sup\{t/p(t) = t^{\alpha-1} \leqslant s\} = \sup\{t\,|\,t \leqslant s^{\frac{1}{\alpha-1}}\} = s^{\frac{1}{\alpha-1}} = s^{\beta-1},$$

unde $\beta - 1 = \dfrac{1}{\alpha-1}$, deci

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1. \tag{6.2.11}$$

N-funcția generată de q este

$$v \xrightarrow{N} N(v) = \int_0^{|v|} s^{\beta-1}\,ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}. \tag{6.2.12}$$

Ținînd seama de definiția 6.2.3, rezultă că N-funcțiile

$$u \xrightarrow{M} M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$$

și

$$v \xrightarrow{N} N(v) = \frac{|v|^\beta}{\beta}, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

sînt N-funcții complementare.

TEOREMA 6.2.3. *Dacă M și N sînt două N-funcții complementare, atunci are loc inegalitatea lui Young*

$$uv \leqslant M(u) + N(v) \tag{6.2.13}$$

Dacă u este dat, atunci în (6.2.13) avem egalitate pentru $v = p(|u|)\,\text{sign}\,u$, adică

$$|u|\,p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)\,\text{sign.}\,u] = M(u) + N[p(|u|)]. \tag{6.2.14}$$

Analog, dacă v este dat, atunci în (6.2.13) avem egalitate pentru $u = q(|v|)\,\text{sign}\,v$, adică

$$|v|\,q(|v|) = M[q(|v|)] + N[v] \tag{6.2.15}$$

în obținerea lui (6.2.14) și (6.2.15) ținîndu-se seama că N-funcțiile sînt funcții pare.

DEFINIȚIA 6.2.4. Se spune că N-funcția M satisface o Δ_2-condiție pentru valori mari ale argumentului dacă există constantele $k > 0$ și $u_0 \geqslant 0$, astfel încît, pentru orice $u \geqslant u_0$,

$$M(2u) \leqslant kM(u) \tag{6.2.16}$$

Observație. Este ușor de văzut că avem totdeauna $k \geqslant 2$. Într-adevăr, din (6.2.1), pentru $u_1 = 2u$ $(u \geqslant u_0)$ și $u_2 = 0$, rezultă

$$2M(u) \leqslant M(2u) \tag{6.2.17}$$

care comparată cu (6.2.16) dă $k \geqslant 2$.

TEOREMA 6.2.4. *O condiție suficientă pentru ca N-funcția M să satisfacă o Δ_2-condiție este ca să existe constantele $u_0 \geqslant 0$ și $l > 1$ astfel încît funcția p din reprezentarea (6.2.7) să satisfacă următoarea condiție*

$$p(2u) \leqslant lp(u) \tag{6.2.18}$$

pentru orice $u \geqslant u_0$.

Demonstrație. Fie, într-adevăr, $u \geqslant u_0 \geqslant 0$. Din reprezentarea (6.2.7) rezultă:

$$M(2u) = \int_0^{2u} p(t)\,dt = 2\int_0^u p(2\xi)\,d\xi \leqslant 2l\int_0^u p(\xi)\,d\xi = 2lM(u)$$

aşadar

$$M(2u) \leqslant 2lM(u), \quad 2l \geqslant 2$$

deci M satisface o Δ_2-condiţie.

§ 6.3. Spaţii Orlicz

În cele ce urmează, G reprezintă o mulţime mărginită şi închisă a unui spaţiu euclidian finit dimensional, cu măsura Lebesgue obişnuită.

DEFINIŢIA 6.3.1. Fie M o N-funcţie. Se numeşte *clasă Orlicz a funcţiei M în raport cu G* şi se notează $L_M(G)$, mulţimea funcţiilor reale u definite pe G şi satisfăcînd la

$$\rho(u\,;\,M) = \int_G M[u(x)]\,\mathrm{d}x < \infty \tag{6.3.1}$$

Aşadar,

$$L_M(G) = \left\{u/u\colon G \to R,\ \rho(u\,;\,M) = \int_G M[u(x)]\,\mathrm{d}x < \infty\right\}. \tag{6.3.2}$$

Toate funcţiile mărginite pe G aparţin lui $L_M(G)$ dar nu şi orice funcţie sumabilă pe G.

Are loc însă următoarea propoziţie:

Dacă u este sumabilă pe G, există o N-funcţie a cărei clasă Orlicz conţine pe u.

În ceea ce priveşte structura clasei Orlicz $L_M(G)$, se poate demonstra cu uşurinţă următoarea teoremă:

TEOREMA 6.3.1. *Clasa Orlicz $L_M(G)$ este o mulţime convexă.*

Demonstraţie. Fie, într-adevăr, $u_1, u_2 \in L_M(G)$,

$$\rho(u_1\,;\,M) = \int_G M[u_1(x)]\,\mathrm{d}x < \infty$$

$$\rho(u_2\,;\,M) = \int_G M[u_2(x)]\,\mathrm{d}x < \infty$$

şi $u_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha)\,u_2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Ţinînd seama că N-funcţia M este convexă, rezultă

$$\rho(u_\alpha\,;\,M) = \int_G M[\alpha u_1(x) + (1-\alpha)\,u_2(x)]\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \int_G M[u_1(x)]\,\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int_G M[u_2(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \alpha\rho(u_1\,;\,M) + (1-\alpha)\,\rho(u_2\,;\,M) < \infty.$$

Teorema următoare evidenţiază importanţa satisfacerii de către N-funcţia M a unei Δ_2-condiţii.

TEOREMA 6.3.2. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $L_M(G)$ să fie o mulţime liniară este ca N-funcţia M să satisfacă o Δ_2-condiţie.*

Fie M şi N două N-funcţii complementare.

Vom nota cu $L_M^*(G)$ mulţimea funcţiilor reale u definite pe G şi satisfăcînd condiţia

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx < \infty \tag{6.3.3}$$

pentru orice $v \in L_N(G)$.

Ca şi în definiţia claselor Orlicz, nu se face distincţie între funcţii ce diferă pe mulţimi de măsură nulă.

Aşadar,

$$L_M^*(G) = \left\{ u \mid u : G \to R,\ (u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx < \infty,\ v \in L_N(G) \right\} \tag{6.3.4}$$

Din definiţie rezultă imediat liniaritatea lui $L_M^*(G)$.

TEOREMA 6.3.3. *Avem*

$$L_M(G) \subset L_M^*(G). \tag{6.3.4}$$

Demonstraţie. Fie $u \in L_M(G)$. Ţinînd seama de inegalitatea lui Young, (vezi (6.2.13)), pentru orice $v \in L_N(G)$, avem

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx \leqslant \int_G \{M[u(x)] + N[v(x)]\}\, dx =$$

$$= \rho(u; M) + \rho(v; N) < \infty,$$

deci $u \in L_M^*(G)$.

TEOREMA 6.3.4. *Fie $u \in L_M^*(G)$. Atunci*

$$\sup_{\substack{v \in L_N(G) \\ \rho(v; N) \leqslant 1}} |(u, v)| = \sup_{\substack{v \in L_N(G) \\ \int_G N[v(x)]\, dx \leqslant 1}} \left| \int_G u(x)\, v(x)\, dx \right| < \infty. \tag{6.3.5}$$

Această teoremă permite (vezi [39] p. 85) să se introducă pe $L_M^*(G)$ o normă notată $\| \ \|_M$ şi numită norma Orlicz, punînd

$$u \in L_M^*(G),\ \|u\|_M = \sup_{\substack{v \in L_N(G) \\ \rho(v; N) \leqslant 1}} \left| \int_G u(x)\, v(x)\, dx \right|. \tag{6.3.6}$$

Spațiul $(L_M^*(G), \| \ \|_M)$ se numește spațiu Orlicz.

TEOREMA 6.3.5. *Spațiul Orlicz* $(L_M^*(G), \| \ \|_M)$ *este complet.*

Am văzut anterior că $L_M(G) \subset L_M^*(G)$ și că oricare ar fi $u \in L_M(G)$, $v \in L_N(G)$, avem

$$uv \leqslant M(u) + N(v).$$

Utilizînd această inegalitate pentru funcțiile $|u|$ și $|v|$, avem

$$|(u, v)| = \left| \int_G u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_G |u(x)|\, |v(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int_G (M[|u(x)|] + N[|v(x)|])\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_G (M[u(x)] + N[v(x)])\, \mathrm{d}x = \rho(u; M) + \rho(v; N).$$

Așadar, oricare ar fi $u \in L_M(G)$, $v \in L_N(G)$, avem

$$|(u, v)| \leqslant \rho(u, M) + \rho(v, N)$$

De aici rezultă

$$\|u\|_M = \sup_{\substack{v \in L_N(G) \\ \rho(v, N) \leqslant 1}} |(u, v)| \leqslant \rho(u, M) + 1.$$

Avem, așadar, următoarea teoremă:

TEOREMA 6.3.6. *Dacă* $u \in L_M(G) \subset L_M^*(G)$, *atunci*

$$\|u\|_M \leqslant \rho(u, M) + 1. \tag{6.3.7}$$

LEMA 6.3.1. *Fie* M *o* N*-funcție și fie* p *funcția cu care* M *se reprezintă sub forma* (6.2.7). *Dacă* $u \in L_M^*(G)$ *și* $\|u\|_M \leqslant 1$, *atunci* v_0 *definită prin*

$$x \xrightarrow{v_0} v_0(x) = p(|u(x)|), \quad x \in G$$

aparține clasei Orlicz $L_N(G)$ *și* $\rho(v_0; N) \leqslant 1$.

O consecință imediată a acestei leme este

LEMA 6.3.2. *Dacă* $u \in L_M^*(G)$ *și* $\|u\|_M \leqslant 1$, *atunci* $u \in L_M(G)$ *și*

$$\rho(u; M) \leqslant \|u\|_M. \tag{6.3.8}$$

Demonstrație. Fie v_0 definită pe G astfel

$$x \xrightarrow{v_0} p(|u(x)|) \operatorname{sign} u(x).$$

Atunci, după (6.2.14), avem

$$u(x)v_0(x) = |u(x)|p(|u(x)|) = M[u(x)] + N[v_0(x)] =$$

$$= M[u(x)] + N[p(|u(x)|)]$$

iar pe de altă parte, după lema precedentă, avem

$$\rho(v_0, N) = \int_G N[v_0(x)]\,dx = \int_G N[p(|u(x)|) \operatorname{sign} u(x)]\,dx =$$

$$= \int_G N[p(|u(x)|)]\,dx \leqslant 1.$$

Atunci,

$$\rho(u, M) = \int_G M[u(x)]\,dx \leqslant \int_G M[u(x)]\,dx + \int_G N[v_0(x)]\,dx =$$

$$= \int_G u(x)\,v_0(x)\,dx \leqslant \sup_{\substack{v \in L_N^*(G) \\ \rho(v, N) \leqslant 1}} \int_G u(x)\,v(x)\,dx = \|u\|_M.$$

Din lema 6.3.2 rezultă acum

LEMA 6.3.3. *Oricare ar fi* $u \in L_M^*(G)$, *avem*

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_M}\right] dx \leqslant 1. \tag{6.3.9}$$

Pentru demonstrație este suficient să aplicăm lema precedentă pentru funcția $\dfrac{u}{\|u\|_M}$.

TEOREMA 6.3.7. *Oricare ar fi* $u \in L_M^*(G)$ *și* $v \in L_N^*(G)$, *are loc inegalitatea lui Hölder* :

$$\left|\int_G u(x)\,v(x)\,dx\right| \leqslant \|u\|_M \|v\|_N. \tag{6.3.10}$$

Demonstrație. După lema 6.3.3, oricare ar fi $v \in L_N^*(G)$, $\frac{v}{\|v\|_N} \in L_N(G)$ și avem

$$\rho\left(\frac{v}{\|v\|_N};\ N\right) = \int_G N\left[\frac{v(x)}{\|v\|_N}\right] \mathrm{d}x \leqslant 1.$$

Avem, evident,

$$\left|\int_G u(x)\,\frac{v(x)}{\|v\|_N}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{\substack{v \in L_N(G) \\ \rho(v;\,N) \leqslant 1}} \left|\int_G u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\right| = \|u\|_M,$$

din care decurge imediat (6.3.10).

Fie $u \in L_M^*(G)$. Evident, $u = \left(\frac{u}{\|u\|_M}\right)\|u\|_M$ unde, conform lemei 6.3.2, $\frac{u}{\|u\|_M} \in L_M(G)$. Rezultă așadar că $L_M^*(G)$ este o parte a anvelopei liniare a lui $L_M(G)$,

$$L_M^*(G) \subset \widehat{L_M(G)} \tag{6.3.11}$$

Fie acum că N-funcția M satisface o Δ_2-condiție. Atunci (vezi teorema 6.3.2), $L_M(G)$ este o mulțime liniară, deci coincide cu propria sa anvelopă liniară, și deci (6.3.11) se scrie

$$L_M^*(G) \subset L_M(G). \tag{6.3.12}$$

Pe de altă parte, conform teoremei 6.3.3, avem totdeauna

$$L_M(G) \subset L_M^*(G). \tag{6.3.13}$$

Din (6.3.12) și (6.3.13) rezultă

TEOREMA 6.3.8. *Dacă N-funcția M satisface o Δ_2-condiție, atunci*

$$L_M^*(G) = L_M(G). \tag{6.3.14}$$

DEFINIȚIA 6.3.1. Șirul $u_n \in L_M^*(G)$, $n \in N$, se zice convergent în medie la $u_0 \in L_M^*(G)$ dacă

$$\lim_{n \to \infty} \int_G M[u_n(x) - u_0(x)]\,\mathrm{d}x = 0. \tag{6.3.15}$$

TEOREMA 6.3.9. *Dacă* $u_n \in L_M^*(G)$, $n \in N$, *converge în norma lui* $L_M^*(G)$ *la* $u_0 \in L_M^*(G)$, *atunci* u_n *converge și în medie la* u_0.

Demonstrație. Din faptul că $\|u_n - u_0\|_M \to 0$ rezultă că există un rang n_0 astfel încît pentru $n \geqslant n_0$, $\|u_n - u_0\|_M \leqslant 1$. Atunci însă, conform lemei 6.3.2, $u_n - u_0 \in L_M(G)$ și

$$\rho(u_n - u_0;\ M) = \int_G M[u_n(x) - u_0(x)]\,dx \leqslant \|u_n - u_0\|_M. \quad (6.3.16)$$

Din (6.3.16), ținînd seama că $\|u_n - u_0\|_M \to 0$, $n \to \infty$ rezultă

$$\int_G M[u_n(x) - u_0(x)]\,dx \to 0, \quad n \to \infty$$

deci u_n converge în medie la u_0.

Reciproca teoremei 6.3.9 nu este, în general, adevărată.

Teorema următoare dă o condiție suficientă în care reciproca teoremei 6.3.9 este adevărată.

TEOREMA 6.3.10. *Dacă N-funcția M satisface o* Δ_2*-condiție, atunci convergența în norma lui* $L_M^*(G)$ *este echivalentă cu convergența în medie.*

Demonstrație. Ținînd seama de teorema 6.3.9, rămîne de demonstrat că dacă N-funcția M satisface o Δ_2-condiție, atunci convergența în medie implică convergența în norma lui $L_M^*(G)$.

Dar, după teorema 6.3.8, dacă N-funcția M satisface o Δ_2-condiție, atunci $L_M^*(G) = L_M(G)$. Fie $\varepsilon > 0$ și $k \in N$, $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Fie $u_n \in L_M^*(G) = L_M(G)$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \int_G M[u_n(x) - u_0(x)]\,dx = 0, \quad (6.3.17)$$

Dar, N-funcția M satisface o Δ_2-condiție, deci

$$M[2^k(u_n(x) - u_0(x)] \leqslant l^k M[u_n(x) - u_0(x)],\ l \geqslant 2.$$

de unde

$$\int_G M[2^k(u_n(x) - u_0(x))]\,dx \leqslant l^k \int_G M[u_n(x) - u_0(x)]\,dx. \quad (6.3.18)$$

Din (6.3.18) și (6.3.17) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_G M[2^k(u_n(x) - u_0(x))]\,dx = 0. \quad (6.3.19)$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie n_0 astfel încît pentru $n \geqslant n_0$ să avem

$$\int_G M[2^k(u_n(x) - u_0(x))]\,dx < 1 \tag{6.3.20}$$

lucru posibil dacă ținem seama de (6.3.19).

Atunci însă, după teorema 6.3.6, rezultă

$$\|2^k(u_n - u_0)\|_M \leqslant \rho(2^k(u_n - u_0);\ M) + 1 < 2$$

de unde

$$\|u_n - u_0\|_M < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.3.11. *Mulțimea funcțiilor mărginite pe G este densă în $L_M(G)$ în sensul convergenței în medie.*

DEFINIȚIA 6.3.2. (Spațiul $E_M(G)$). $E_M(G)$ este închiderea în norma lui $L_M^*(G)$ a mulțimii funcțiilor mărginite pe G.

Să observăm următoarele: Dacă N-funcția M satisface o Δ_2-condiție, atunci $L_M(G) = L_M^*(G)$ iar convergența în medie este echivalentă cu convergența în norma lui $L_M^*(G)$.

Asociind acest fapt teoremei 6.3.11, rezultă că mulțimea funcțiilor mărginite pe G este densă în $L_M^*(G)$ în sensul normei din $L_M^*(G)$, dacă N-funcția M satisface o Δ_2-condiție.

Ținînd seama de definiția spațiului $E_M(G)$, rezultă următoarea teoremă:

TEOREMA 6.3.12. *Dacă N-funcția M satisface o Δ_2-condiție, spațiile $E_M(G)$ și $L_M^*(G)$ coincid.*

TEOREMA următoare este importantă:

TEOREMA 6.3.13. *Spațiul $E_M(G)$ este separabil.*

Din teoremele 6.3.13 și 6.3.11 rezultă

TEOREMA 6.3.14. *Dacă N-funcția M satisface o Δ_2-condiție, atunci spațiul Orlicz $L_M^*(G)$ este separabil.*

Teorema care urmează completează rezultatul furnizat de teorema 6.3.14.

TEOREMA 6.3.15. *Dacă N-funcția M nu satisface o Δ_2-condiție, atunci $L_M^*(G)$ nu este separabil.*

§6.4. Funcționale liniare și mărginite pe $L_M^*(G)$.

Fie M și N două N-funcții complementare și v fixat în $L_N^*(G)$ Să punem pentru orice $u \in L_M^*(G)$.

$$l(u) = (u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx. \tag{6.4.1}$$

Oricare ar fi $u \in L_M^*(G)$, din inegalitatea lui Holder rezultă

$$|l(u)| = |(u, v)| = \left| \int_G u(x)\, v(x)\, dx \right| \leqslant \|u\|_M \|v\|_N,$$

de unde

$$\|l\| = \sup_{\|u\|_M \leqslant 1} |l(u)| \leqslant \|v\|_N. \tag{6.4.2}$$

Aşadar, (6.4.1) defineşte pentru fiecare v fixat în $L_N^*(G)$, o funcţională liniară şi mărginită pe $L_M^*(G)$.

În general, însă, (6.4.1) nu dă forma generală a funcţionalelor liniare şi mărginite pe $L_M^*(G)$, aşa cum rezultă din teorema următoare:

TEOREMA 6.4.1. *Fie că N-funcţia M nu satisface o Δ_2-condiţie. Atunci* (6.4.1) *nu reprezintă forma generală a funcţionalelor liniare şi mărginite pe $L_M^*(G)$.*

În schimb, avem

TEOREMA 6.4.2. *Formula* (6.4.1) *dă forma generală a funcţionalelor liniare şi mărginite pe $E_M(G)$.*

Din teoremele 6.4.2 şi 6.3.12 rezultă

TEOREMA 6.4.3. *Dacă N-funcţia M satisface o Δ_2-condiţie, atunci* (6.4.1) *dă forma generală a funcţionalelor liniare şi mărginite pe $L_M^*(G)$.*

DEFINIŢIA 6.4.1. (Convergenţa E_N-slabă). Se zice că şirul $u_n \in L_M^*(G)$ este E_N-slab convergent, dacă şirul de numere

$$l(u_n) = \int_G u_n(x)\, v(x)\, dx \tag{6.4.3}$$

converge oricare ar fi $v \in E_N(G)$.

Este evident că, în general, convergenţa E_N slabă diferă de convergenţa slabă în $L_M^*(G)$, pentru că mulţimea funcţionalelor de forma

$$l(u) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx$$

cu $v \in E_N(G)$ nu epuizează mulţimea funcţionalelor liniare şi mărginite pe $L_M^*(G)$. Este evident, ţinînd seama de teoremele 6.4.3 şi 6.3.12 că dacă ambele N-funcţii M şi N satisfac o Δ_2-condiţie, atunci convergenţa E_N-slabă coincide cu convergenţa slabă pe $L_M^*(G)$.

§ 6.5. N-funcţii şi reprezentarea funcţionalelor teoriei de plasticitate a lui Hencky-Nadai [42 d]

LEMA 6.5.1. *Fie funcţionala*

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau_i^2(u)} \rho_i(\xi)\, d\xi \right) d\Omega + \int_\Omega qu\, d\Omega \tag{6.5.1}$$

definită pe mulțimea liniară a funcțiilor de clasă $C^{(l)}(\bar{\Omega})$ *și care satisfac condiții la limită liniare și omogene, mulțime pe care o notăm* $\Phi^{(l)}(\Omega)$, *iar* $q \in L_2(\Omega)$.

Presupunem că:

1°. ρ_i, *sînt funcții continue pe* $[0, +\infty)$, $\rho_i(\xi) \geqslant 0$ *oricare ar fi* $\xi \geqslant 0$ *și* $i = 1, \cdots, m$;

2°. τ_i^2 *sînt forme pătratice nenegative relativ la* u *și la derivatele sale pînă la ordinul* l *inclusiv*;

3°. *există măcar un indice* j, $1 \leqslant j \leqslant m$, *pentru care*

$$\rho_j(\xi) \geqslant \rho_0 > 0, \quad \rho_0 = \text{ct.}, \quad \xi \geqslant 0, \tag{6.5.2}$$

$$\int_\Omega \tau_j^2(u)\, d\Omega \geqslant \gamma^2 \int_\Omega u^2\, d\Omega, \quad \gamma^2 = \text{const.} > 0 \tag{6.5.3}$$

pentru orice $u \in \Phi^{(l)}(\Omega)$;

4°. $\tau_j^2(0) = 0$.

Atunci există marginea inferioară a lui Φ_0 *pe* $\Phi^{(l)}(\Omega)$.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că, în conformitate cu teorema 4.2.5, $\Phi^{(l)}(\Omega)$ este densă în $L_2(\Omega)$.

Fie

$$\rho_j(\xi) = \varphi_j(\xi) + \rho_0, \quad \xi \geqslant 0, \tag{6.5.4}$$

cu

$$\varphi_j(\xi) = \rho_j(\xi) - \rho_0 \geqslant 0, \quad \xi \geqslant 0. \tag{6.5.5}$$

Fie b un număr real strict pozitiv, și

$$b\Phi_0 = \Phi_1, \quad b\varphi_j = \varphi_{j,1} \quad b\rho_i = \rho_{i,1} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.5.6}$$

Din (6.5.1) rezultă

$$\Phi_1(u) = b\Phi_0(u) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{\tau_i^2(u)} b\rho_j(\xi)\, d\xi \right) d\Omega + \int_\Omega qbu\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{\tau_i^2(u)} \rho_{i,1}(\xi)\, d\xi \right) d\Omega - b\|q\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{\tau_i^2(u)} \rho_{i,1}(\xi)\, d\xi \right) d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|_{L_2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{\tau_i^2(u)} \rho_{i,1}(\xi)\, d\xi \right) d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|_{L_2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2\gamma^2}\int_\Omega \tau_j^2(u)\, d\Omega$$

unde am ţinut seama de (6.5.6) ca şi de inegalităţile evidente

$$\int_\Omega qu\,d\Omega \geqslant -\|q\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)},$$

$$-\int_\Omega u^2\,d\Omega \geqslant -\frac{1}{\gamma^2}\int_\Omega \tau_j^2(u)\,d\Omega,$$

ultima fiind o consecinţă a lui (6.5.3)

Aşadar, oricare ar fi $u \in \Phi^{(1)}(\Omega)$, avem

$$\Phi_1(u) \geqslant \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{\tau_i^2(u)} \rho_{i,1}(\xi)\,d\xi\right) d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2\gamma^2}\int_\Omega \tau_j^2(u)\,d\Omega. \quad (6.5.7)$$

Cum însă $\tau_j^2(0) = 0$, avem

$$\int_\Omega \tau_j^2(u)\,d\Omega = \int_\Omega \left(\int_0^{\tau_j^2(u)} d\xi\right) d\Omega. \quad (6.5.8)$$

Din (6.5.7) şi (6.5.8) rezultă

$$\Phi_1(u) \geqslant \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \int_0^{\tau_i^2(u)} \rho_{i,1}(\xi)\,d\xi\right) d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2\gamma^2}\int_\Omega \tau_j^2(u)\,d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \left(\int_0^{\tau_j^2(u)} \rho_{j,1}(\xi)\,d\xi\right) d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2\gamma^2}\int_\Omega \tau_j^2(u)\,d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_0^{\tau_j^2(u)} \left[\rho_{j,1}(\xi) - \frac{1}{2\gamma^2}\right] d\xi\right) d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u)} \left[\varphi_{j,1}(\xi) + b\rho_0 - \frac{1}{2\gamma^2}\right] d\xi\,d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Alegînd $b = \dfrac{1}{\gamma^2\rho_0}$, rezultă:

$$\Phi_1(u) \geqslant \frac{1}{\gamma^2}\int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u)} \left[\gamma^2\varphi_{j,1}(\xi) + \frac{1}{2}\right] d\xi\,d\Omega - \frac{1}{2\gamma^4\rho_0^2}\|q\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Dar,

$$\gamma^2\varphi_{j,1}(\xi) = \gamma^2 b\varphi_j(\xi) = \gamma^2 b[\rho_j(\xi) - \rho_0] \geqslant 0$$

și deci

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\gamma^2 \rho_0} \Phi_0(u) \geqslant -\frac{1}{2\gamma^4 \rho_0} \|q\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \Phi_0(u) \geqslant -\frac{1}{2\gamma^2} \|q\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Inegalitatea (6.5.7) arată că Φ_0 este mărginită inferior pe $\Phi^{(1)}(\Omega)$, deci posedă margine inferioară pe $\Phi^{(1)}(\Omega)$.

De remarcat că funcționalele teoriei Hencky-Nadai pe care le-am pus în evidență în § 5.1 (funcționala teoriei Hencky-Nadai corespunzătoare problemei lui Dirichlet, (5.1.1.50), (5.1.4.51), pentru cazul incompresibil, funcționala torsiunii elasto-plastice (5.1.1.45), funcționala corespunzătoare încovoierii plăcilor elasto-plastice (5.1.5.22) sînt funcționale de tipul funcționalei (6.5.1). Condițiile impuse funcțiilor ρ_i sînt impuse în aceste cazuri funcției materiale a teoriei Hencky-Nadai și toate celelalte condiții sînt de asemenea satisfăcute pentru $\Phi^{(1)}(\Omega) = \Phi^{(2)}(\Omega)$ respectiv $\Phi^{(2)}(\Omega)$ respectiv $\Phi^{(4)}(\Omega)$. Așadar, concluzia lemei 6.5.1 este de asemenea valabilă pentru aceste funcționale.

TEOREMA 6.5.1. *Fie că la ipotezele lemei* 6.5.1 *se adaugă ipoteza suplimentară*

$$\Phi_0(0) = 0.$$

Atunci, oricare ar fi u_n *un șir minimizant al funcționalei* Φ_0 *pe* $\Phi^{(1)}(\Omega)$, *există* n_0 *astfel încît:*

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|q\|_{L_2(\Omega)}}{\gamma^2 \rho_0} \tag{6.5.9}$$

$$\int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \rho_j(\xi)\, d\xi\, d\Omega \leqslant \frac{\|q\|^2_{L_2(\Omega)}}{\gamma^2 \rho_0}. \tag{6.5.10}$$

Demonstrație. Să observăm mai întîi că ipoteza $\Phi_0(0) = 0$ este destul de naturală. Într-adevăr, ținînd seama de (6.5.1) se vede că o condiție suficientă pentru a avea îndeplinită această condiție este să avem $\tau_i^2(0) = 0$. Pentru toate funcționalele teoriei plasticității despre care am vorbit mai sus, formele pătratice $\tau_i^2(u)$ satisfac această condiție.

Fie u_n un șir minimizant al funcționalei Φ_0 pe $\Phi^{(1)}(\Omega)$. Existența unor asemenea șiruri este asigurată de lema 6.5.1. Din definiția șirurilor minimizante decurge

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_0(u_n) = d = \inf_{u \in \Phi^{(1)}(\Omega)} \Phi_0(u) \leqslant \Phi_0(0) = 0$$

așadar, există un rang n_0 astfel încît pentru $n \geqslant n_0$, avem

$$\Phi_0(u_n) \leqslant 0, \quad n \geqslant n_0. \tag{6.5.11}$$

Pe de altă parte, din inegalitatea (6.5.3) urmează că pentru orice $u \in \Phi^{(1)}(\Omega)$ avem

$$\rho_0 \gamma^2 \| u \|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \rho_0 \int_\Omega \tau_j^2(u)\, d\Omega = \rho_0 \int_\Omega \left(\int_0^{\tau_j^2(u)} d\xi \right) d\Omega \leqslant \int_\Omega \left(\int_0^{\tau_j^2(u)} \rho_j(\xi)\, d\xi \right) d\Omega,$$

adică

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\gamma \sqrt{\rho_0}} \left(\int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u)} \rho_j(\xi)\, d\xi\, d\Omega \right)^{1/2}. \tag{6.5.12}$$

În particular, pentru termenii şirului minimizant cu rangul depăşind pe n_0, avem

$$\| u_n \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\gamma \sqrt{\rho_0}} \left(\int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \rho_j(\xi)\, d\xi\, d\Omega \right)^{1/2}. \tag{6.5.13}$$

Pe de altă parte, pentru $n \geqslant n_0$ avem (vezi (6.5.1))

$$0 \geqslant \Phi_0(u_n) \geqslant \int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \rho_j(\xi)\, d\xi\, d\Omega - \| q \|_{L_2(\Omega)} \| u_n \|_{L_2(\Omega)}. \tag{6.5.14}$$

Din (6.5.13) şi (6.5.14) rezultă

$$\int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \rho_j(\xi)\, d\xi\, d\Omega \leqslant \frac{\| q \|^2_{L_2(\Omega)}}{\gamma^2 \rho_0} \tag{6.5.15}$$

iar din (6.5.15) şi (6.5.13) rezultă:

$$\| u_n \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\| q \|_{L_2(\Omega)}}{\gamma^2 \rho_0}. \tag{6.5.16}$$

Inegalităţile (6.5.15) şi (6.5.16) demonstrează teorema.

TEOREMA 6.5.2. *Fie că în afara condiţiilor impuse de lema* 6.5.1 *funcţia* ρ_j *satisface în plus condiţia:* $\rho_j \in C^{(1)}[0, \infty)$ *şi*

$$\frac{d}{dt} [\rho_j(t^2)\, t] = \rho_j(t^2) + 2t^2 \rho_j'(t^2) > 0, \quad t \geqslant 0. \tag{6.5.17}$$

Atunci condiţia (6.5.10) *se scrie sub forma*

$$\int_\Omega M_j[\tau_j(u_n)]\, d\Omega \leqslant \frac{\| q \|^2_{L_2(\Omega)}}{\gamma^2 \rho_0}, \quad n \geqslant n_0. \tag{6.5.18}$$

M_j *fiind N-funcţia generată de funcţia* $p_j(t) = 2\rho_j(t^2) \cdot t$, $t \geqslant 0$.

Demonstrație. Este evident că p_j satisface condițiile impuse de reprezentarea N-funcțiilor prin formula (6.2.7).

Fie M_j, N-funcția generată de p_j:

$$u \xrightarrow{M_j} M_j(u) = \int_0^{|u|} 2\rho_j(t^2)\, t\, dt.$$

Cu schimbarea de variabilă $t^2 = \xi$, obținem

$$M_j(u) = \int_0^{u^2} \rho_j(\xi)\, d\xi$$

astfel încît, dacă u_n este un șir minimizant pentru Φ_0 pe $\Phi^{(l)}(\Omega)$, avem

$$M_j[\tau_j(u_n)] = \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \rho_j(\xi)\, d\xi. \tag{6.5.19}$$

Din (6.5.19) și (6.5.15) rezultă

$$\int_\Omega M_j[\tau_j(u_n)]\, d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \rho_j(\xi)\, d\xi\, d\Omega \leqslant \frac{\|q\|^2_{L_2(\Omega)}}{\gamma^2 \rho_0}, \qquad n \geqslant n_0,$$

și teorema este demonstrată.

Evident, inegalitatea (6.5.17) permite să enunțăm următoarea teoremă:

TEOREMA 6.5.3. *Dacă ρ_j satisface condițiile impuse de lema 6.5.1 și teorema 6.5.2, dacă $\Phi_0(0) = 0$, atunci pentru orice șir minimizant u_n al funcționalei (6.5.1) pe $\Phi^{(l)}(\Omega)$ există n_0 astfel încît $\tau_j(u_n)$, $n \geqslant n_0$, fac parte din clasa Orlicz a N-funcției M_j generată de p_j, care pentru orice $t \geqslant 0$, este definită de $p_j(t) = 2\rho_j(t^2)\, t$.*

De remarcat că acest rezultat a fost o consecință a faptului că ρ_j satisface condiții cărora în cazul funcționalelor concrete ale teoriei plasticității li s-au dat interpretări mecanice precise.

În sfîrșit, vom enunța următoarea teoremă evidentă:

TEOREMA 6.5.4. *Dacă condițiile impuse funcției ρ_j prin lema 6.5.1 și teorema 6.5.2 sînt satisfăcute de toate funcțiile ρ_i, $i = 1, \ldots, m$ din reprezentarea (6.5.1) a funcționalei Φ_0, și dacă $\Phi_0(0) = 0$, atunci există pentru orice șir minimizant u_n al funcționalei Φ_0 pe $\Phi^{(l)}(\Omega)$, un rang N_0, astfel încît valoarea funcționalei în orice punct u_n, $n \geqslant N_0$, al acestui șir se scrie*

$$\Phi_0(u_n) = \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega M_i[\tau_i(u_n)]\, d\Omega + \int_\Omega q u_n\, d\Omega,$$

M_i fiind N-funcțiile generate după formula (6.2.7) *de funcțiile p_i care în orice punct $t > 0$, se scriu $p_i(t) = 2\rho_i(t^2)\,t$.*

Aceasta a fost ideea lui Langenbach de introducere a spațiilor Orlicz în studiul problemelor de minim pentru funcționale ale teoriei Hencky-Nadai. Rezultatele date la începutul acestui capitol sînt suficiente pentru ca cititorul să poată urmări cu ușurință rezultatele din [42d] privind proprietățile de regularitate ale soluției generalizate a problemei de minim pentru funcționala (6.5.1) pe $\Phi^{(0)}(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. Agmon, S., *Maximum properties for solutions of higher order elliptic equations.* Bull. Amer. Math. Soc., U.S.A., **60**, (1960), 77—80.
2. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying boundary conditions,* I, Comm. Pure Applied Math., **12**, (1959), 623—724; II, ibid., **17**, (1964), 35—92.
3. Ahiezer, N. I., Glazman, I. M., *Teoria operatorilor liniari pe spații hilbertiene.* M.-L., Gostehizdat, 1950 (în lb. rusă).
4. Altman, M., *Generalized gradient methods of minimizing a functional.* Bull., Acad. Polon. Sci., **14**, (1966), 6.
5. Aubin, J. P., a) *Approximation des espaces de distribution et des opérateurs différentiels,* Thèse, 1966.
   b) *Un théorème de compacité.* C. R. Acad. Sci. Paris, **256**, (1963), 5042—5044.
6. Babuška, I., *Asupra algoritmului lui Schwarz în teoria ecuațiilor diferențiale ale fizicii matematice.* Czechoslovak. Math. J., **8**, (1958), 328—343 (în lb. rusă).
7. Barbu, V., *Ecuații funcționale neliniare în spații Banach și probleme la limită.* St. cerc. mat., **20**, 2 (1968), 137—164.
8. Beju, Iulian, *Theorems on Existence, Uniqueness and Stability of the Solution of the Place Boundary-Value Problem in Statics, for Hyperelastic Materials.* Arch. Rat. Mech. Annal, 42 (1971) 1—23
9. Berger, H. M., a) *A new approach to the analysis of large deflexions of plates.* Journ. Appl. Mech., **22**, (1955), 4, 465—472.
   b) *An application of the calculus of variations in the large of the equations of elasticity.* Bull. Amer., Math., Soc., U.S.A., **73**, (1967), 520—525.
10. Beurling, A., Livingston, A. E., *A theorem on duality mappings in Banach spaces,* Ark. Mat., **4**, (1961), 405—411.
11. Bogdanova, N., *Probleme variaționale pentru medii anizotrope, fizic neliniare.* Academia Bulgară de Ştiinţe, Buletinul Institutului de ştiinţe tehnice, **VII**, (1970) (în lb. rusă).
12. Brezis, H., a) *Une généralisation des opérateurs monotones.* b) *Inéquations d'évolution abstraites.* C.R. Acad. Sci., Paris, 1967, 683, 732.
13. Brezis, H., Stampacchia, G., *Sur la régularité de la solutions d'inéquations elliptiques.* Bull., Soc. Math. Fr., **96**, (1958), 153—180.
14. Brezis, H., Sibony, M., *Equivalence de deux inéquations variationnelles et applications.* Arch. Rat. Mech. Annal., **41**, (1971), 254.
15. Browder, F. E., a) *A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems,* I,

Scanned with OKEN Scanner

Proc. Amsterdam, **63**, (1960), 145–159; ibid. II, Proc. Amsterdam, **64**, (1961), 160–169; ibid. III, Proc. Amsterdam, **64**, (1961), 404–410.

b) *Variational boundary value problems for quasilinear elliptic equations of arbitrary order*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **50**, (1963), 31–37.

c) *Existence and approximation of solutions of non-linear variational inequalities*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **56**, (1966), 1080–1086.

d) *Non-linear accretive operators in Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **73**, (1967), 470–476.

e) *Variational boundary value problems for quasilinear elliptic equations*, II, III, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **50**, (1963), 592–598, 794–798.

f) *Non-linear elliptic boundary value problems*. Bull. Amer. Math. Soc., **69**, (1963), 862–874.

g) *Existence and uniqueness theorems for solutions of non-linear boundary value problems*. Proc. A.M.S. Symp. Appl. Math., **XVII**, (1965), 24–29.

h) *Les problèmes non-linéaires*. Les Presses de l'Université de Montréal, (1964).

i) *On a theorem of Beurling and Livingston*. Canad. J. Math., **17**, (1965).

j) *Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **71**, (1965), 780–785.

k) *On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **56**, (1966), 419–425.

l) *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*. Proc. Nat. Acad. U.S.A., **45**, (1959), 365–372.

m) *On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations*. Comm. Pure Appl. Math., **9**, (1956), 351–361.

n) *On the Fredholm alternative for nonlinear operators*. Bull. Amer. Math. Soc., September 1970, 993–998.

o) *Remarks on non linear interpolation in Banach spaces*. J. Funct. Analysis, **4**, (1969), 390–403.

16. Browder, F. E., Figueiredo, D. G. De, *J-monotone nonlinear operators in Banach spaces*. Indag. Math., **4**, (1966), 412–420.

17. Budiansky, B. A., *A reassessment of deformation theories of plasticity*. Journ. Appl. Mech., **26**, (1959), 2.

18. Campanato, S., a) *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey*. Ricerche Mat., **12**, (1963), 67–86.

b) *Sui problemi al contorno per i sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità*, I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13**, (1959), 275–302.

c) *Proprietà di alcuni spazi di Banach, connessi con la teoria dell'elasticità*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **16**, (1962), 121–142.

19. Chittenden, E. W., *On the equivalence of ecart and voisinage*. Trans. Amer. Math. Soc., **18**, (1917), 2, 161–166.

20. Cristescu, N., a) *Dynamic Plasticity*. North Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1967.

b) *Some problems of the mechanics of extensible strings*, in Stress Waves in Anelastic Solids, Springer Verlag, 1963.

Scanned with OKEN Scanner

c) *The braking of high-speed moving bodies by extensible strings.* in Proc. 5 th. Int. Cong. Rheology, Brown University, 1963.

21. DAVIDENKO, D. F., *Despre o nouă metodă de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare.* D.A.N., **88**, (1953), *4*, 601—603.
22. DIACONIȚĂ, V., *Probleme plane în plasticitatea corpurilor ortotrope*, Teză, 1971.
23. DIEUDONNÉ, J., *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, 1960.
24. DINCĂ, G., a) *Sur l'existence et l'unicité des solutions généralisées dans la mécanique des fils elastico-plastiques.* C. R. Acad. Sci. Paris, **269**, (1969), A, 148.

b) *Sur l'existence et l'unicité des solutions généralisées dans la théorie du fluage non-linéaire stationnaire et isotrope.* C. R. Acad. Sci. Paris, **269**, (1969), A 323.

c) *Sur la monotonie d'après Minty-Browder de l'opérateur de la théorie de plasticité.* C. R. Acad. Sci. Paris, **269**, (1969), A. 535.

d) *Réalisation numérique d'une méthode variationnelle pour la fonctionnelle de la théorie de plasticité.* C. R. Acad. Sci. Paris, **269** (1969), A 1139.

e) *Grandes déformations des fils élastiques (le problème thérmique couplée).* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **XXII**, (1968), *1*, 41—65.

f) *Opérateurs monotones dans la théorie de plasticité.* Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa, **XXIV**, (1970), *III*, 357—399.

g) *Operatori monotoni în teoria plasticității.* St. cerc. mat., **22**, (1970), *5*, 701—755.

h) *On the existence and uniqueness of generalized solutions in the theory of non-linear steady creep.* Journ. Math. Phys. (sub tipar).

i) *Sur un résultat de Langenbach concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème de torsion dans la théorie de Hencky-Nadai.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (sub tipar).

j) *Metode numerice în analiza neliniară, Curs special ținut la Facultatea de Matematică Mecanică din București (nepublicat).*

25. DINCULEANU, N., a) *Spații Orlicz de cîmpuri de vectori.* St. cerc. mat., **8**, (1957), *3—4*.

b) *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs.* Atti Acad. naz. Lincei, Rend., cl. sci. fis. mat. e nat., **22**, (1957), *2*.

c) *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionnelles linéaires continues.* Atti Acad. naz. Lincei, Rend., cl. sci. fis. mat. e nat., **22**, (1957), *22*.

26. FOIAȘ, C., *Solutions statistiques des équations d'évolutions non-linéaires*, în Problems in non-linear Analysis, Edizioni Cremonese, Roma, 1971.
27. FRIEDRICHS, K., *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality.* Ann. of Math., **V**, (**48**), *2*, April (1947).
28. GAHEN-TORN, L. N., MIHLIN, S. G., *Asupra rezolvării sistemelor Ritz neliniare.* D.A.N., **138**, (1961), *2*, 258—260 (în lb. rusă).
29. GAHEN-TORN, L. N., *Despre rezolvarea sistemului Ritz pentru funcționalele teoriei plasticității.* Lucrările Inst. V. A. Steklov, **66**, (1962), 190—195. (în lb. rusă).
30. GHELIMAN, V. P., SMULIAN, V. L., *Despre compacitatea slabă în spații Banach.* Mat. Sb., **50**, (1940), 489—492 (în lb. rusă).
31. GHELIMAN, I. V., *Problema minimului funcționalei neliniare.* Lucrările Șt. ale Inst. Ped. Leningrad, **166**, (1958), 255—263. (în lb. rusă).
32. GOVURIN, M. K., *Über die Stieltjessche Integration abstrakter Functionen.* Fund. Math., **27**, (1936), 254—268.
33. GURTIN, M. E., STERNBERG, ELI, *A note on uniqueness in classical elastodynamics.* Quart., Appl. Math., **XIX**, (1961), *2*.

Scanned with OKEN Scanner

34. HEINZ, E., *An elementary analytic theory of degree of mapping in n-dimensional space.* J. Math. Mech., **8**, (1959), 231—247.

35. HLAVÁCEK, I., NEČAS, J., *On inequalities of Korn's type.* Arch. Rat. Mech. An., **36**, (1970), 305—334.

36. ILIUȘIN, A. A., *Plasticitate.* Moscova, 1948 (în lb. rusă).

37. KACIUROVSKI, R.I., *O clasă de ecuații neliniare și cîteva probleme ale mecanicii.* D.A.N., (1970), *1*. (în lb. rusă).

38. KELLER, J. B., ANTMAN, STUART, *Bifurcation points in nonlinear problems.* New York-Beniamin-Amsterdam, 1969.

39. KRASNOSELSKI, M. A., RUTIȚKI, IA. B., *Funcții convexe și spații Orlicz.* Moscova, 1958 (în lb. rusă).

40. LADIJENSKAIA, O. A., URALTZEVA, N.N., *Ecuații eliptice neliniare și probleme variaționale.* Uspehi Mat. Nauk, **XVI**, (1961), *1*.

41. LANCHON, H., DUVAUT, G., *Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section quelconque.* C. R. Acad. Sci. Paris, **264**, (1967), A 520—523.

42. LANGENBACH, A. a) *Aplicarea metodei celor mai mici pătrate la ecuații neliniare.* D.A.N., **143**, (1962), *1* (în lb. rusă).

b) *Verallgemeinerte und exakte Lösungen des Problems der elastisch-plastischen Torsion von Stäben*, Math. Nachr. Band **28** (1965), Heft 3/4, 219—234.

c) *Despre aplicarea unui principiu variațional la ecuații neliniare.* D.A.N., **121**, (1958), *2*, 214—217.

d) *Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitäts und Plastizitätstheorie.* Wiss. Z. Humboldt Univ. Berlin, Math.-Nat. R., **IX**, 1959/1960.

e) *Despre unele ecuații operaționale ale teoriei elasticității în spații hilbertiene.* Vest. L.G.U., *1*, (1961), 38—50.

f) *Über Gleichungen mit Potentialoperatoren und Minimalfolgen nichtquadratischer Funktionale.* Math. Nachr. Band **32** (1966) Heft 1/2.

43. LERAY, J., SCHAUDER, J., *Topologie et équations fonctionnelles.* Ann. Scient. Ecole Norm. Sup., **(3)**, **51**, (1934), 45—78.

44. LIONS, J. L., *Asupra unor inegalități cu derivate parțiale.* Uspehi Mat. Nauk, **XXVI**, *2*, (1971), 205. (în lb. rusă).

45. MARINESCU, G., a) *Asupra formulei lui Legrange în spațiile Banach.* Rev. Univ. „C. I. Parhon" și a Politehnicii București, ser. St. Nat., *4—5*, (1954), 71—72.

b) *Tratat de analiză funcțională*, I, Ed. Academiei, București, 1971.

46. MAZILU, P., S. SBURLAN, *Metode funcționale în rezolvarea ecuațiilor teoriei elasticității*, Ed. Academiei, București (sub tipar).

47. MIHLIN, S. G., a) *Problema minimului funcționalei pătratice.* M-L., Costehizdat, 1952 (în lb. rusă).

b) *Realizarea numerică a metodelor variaționale.* Izd. Nauka, Moscova 1966 (în lb. rusă).

c) *Despre metoda Ritz în probleme neliniare.* D.A.N., **142**, (1962), *4* (în lb. rusă).

d) *Despre alegerea rațională a funcțiilor coordonate în metoda Ritz.* Jurn. Vicisl. Mat. i Mat. Fiz., **2**, (1962), *3* (în lb. rusă).

48. MINTY, J. G., a) *Monotone (non linear) operators in Hilbert spaces.* Duke Math. J., **29** (1962), 341—346.

Scanned with OKEN Scanner

b) *On the monotonicity of the gradient of a convex function*, Pacific Journ. Math., **14**, *2/3*, (1964).

49. Moisil, Gr. C., *La mécanique analytique des systèmes continues.* Thèse, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
50. Natanson, I. P., *Teoria funcțiilor de o variabilă reală.* Editura tehnică, București, 1957.
51. Nečas, J., *Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques.* Prague, 1967.
52. Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S., *Manual de analiză matematică*; vol. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
53. Nicolescu, L. J., *Asupra integrabilității diferențialelor Fréchet și aplicații.* St. cerc. mat., **11**, (1960), 305—335.
54. Predeleanu, M., Ivan, Hlavácek, *Sur l'existence et l'unicité de la solution dans la théorie du fluage linéaire*, I, *Premier problème aux limites.* Aplikace Matematiky, **10**, *5*, (1964), 321—327.

b) *Sur l'existence et l'unicité de la solution dans la théorie du fluage linéaire*, II, *Second problème aux limites.* Aplikace Matematiky, **10**, *5*, (1965), 391—398.

55. Rabotnov, Iu. N., *Teoria fluajului elementelor de construcție.* Moscova, 1966 (în lb. rusă).
56. Roseau, M., *Solutions périodiques des sistèmes différentielles.* Leçons données au Centre International des Sciences Mécaniques (C.I.S.M.), Udine, 1970.
57. Sachman, Jerome L., *A uniqueness theorem for a nonlinear steadily creeping body.* Siam Review, **9**, (1967), *4*.
58. Saty, Thomas L., *Modern nonlinear equations.* Mc. Graw-Hill Book Company, 1967.
59. Sobolev, S. L., *Unele aplicații ale analizei funcționale la fizica matematică.* Izd. L.G.U., 1950 (în lb. rusă).
60. Solomon, L., *Élasticité linéaire.* Masson, Paris, 1968.
61. Stampacchia, G., *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1964, 4413—16.
62. Teodorescu, N., Olariu V., *Ecuațiile fizicii matematice.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1970.
63. Teodorescu, P. P., *Probleme spațiale în teoria elasticității.* Ed. Academiei, București, 1970.
64. Ting, T. W., *Elastic-plastic torsion of a square bar.* Trans. Amer. Math. Soc., **123**, (1966), 369—401.

b) *Elastic-plastic torsion problem, II, III*, Arch. Rat. Mech. Anal., **25**, (1967), 342—366; **34**, (1969), 228—244.

c) *Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars.* J. Math. Mech., **V**, *19*, (1969), 531—551.

65. Tonti, Enzo, *Variational formulation of nonlinear differential equations*, I, II, Bull. de l'Académie Royale de Belgique, mars-avril, 1969.
66. Vainberg, M. M., a) *Noi teoreme pentru operatori și ecuații neliniare.* Moscova, Oblast. Ped. Inst. Ucen. Zap., **77**, *5* (1959) (în lb. rusă).

b) *Asupra convergenței metodei pantei celei mai rapide pentru ecuații neliniare.* D.A.N., **130**, (1960), *1* (în lb. rusă).

c) *Asupra minimului funcționalelor convexe.* Uspehi Mat. Nauk, **20**, (1965), *1* (în lb. rusă).

Scanned with OKEN Scanner

d) *Ecuații neliniare cu operatori potențiali și monotoni.* D.A.N., **183**, (1968), *4* (în lb. rusă).

e) *Metodo variazionale e metodo di Caccippolli nella teoria delle equazioni funzionali non lineari.* Istituto nazionale di alta matematica, Symposia mathematica, V, *2*, (1968), Academic Press, London-New York, (1969).

f) *Metode variaționale în studiul operatorilor neliniari.* G.I.T.T.L., Moscova 1956 (în lb. rusă), traducerea engleză, Holden-Day, San Francisco, Calif., 1964.

67. VILLAGGIO, PIERO, *Proprietà di stabilità e di monotonia nel metodo degli elementi finiti.* AEROTECNICA, Fasc. 3—6, Giugno-Dicembre, 1969.

68. VIȘIK, M. I., *Problema mixtă pentru sisteme de ecuații diferențiale și metode aproximative de rezolvare.* Matem. Sb., **39** (**81**), (1956), *1*, 51—148. *(în lb. rusă).*

Scanned with OKEN Scanner

OPÉRATEURS MONOTONES DANS LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ

(RÉSUMÉ)

Ce travail est gouverné par deux idées : 1) l'obtention des théorèmes d'existence et d'unicité pour les problèmes aux limites de la théorie de la plasticité de Hencky-Nadai ; 2) la réalisation numérique des solutions dont l'existence et l'unicité ont été démontrées.

Nous dirons quelques mots sur la façon dont nous avons réalisé ces idées.

En ce qui concerne les théorèmes d'existence et d'unicité sont démontrées et l'existence et l'unicité des solutions généralisées (dans le sens de Sobolev) pour quelques problèmes aux limites de la théorie de Hencky-Nadai et aussi l'existence et l'unicité de la solution classique pour le problème de la torsion élasto-plastique [24i], [42b].

Voilà les problèmes mécaniques pour lesquels le travail contient la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution dans le sens de Sobolev : le premier problème aux limites (le problème de Dirichlet) pour l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai [24c], le problème de Dirichlet pour l'opérateur de la théorie du fluage non linéaire, stationnaire et isotrope [24b], le problème de la torsion dans la théorie de Hencky-Nadai [42c], la flexion des plaques rigidement fixées à la frontière [47b], le problème des grandes déformations des fils écrouissables [24a].

L'obtention de l'existence et de l'unicité des solutions généralisées pour ces problèmes est une conséquence du théorème variationnel de Langenbach. Pour les opérateurs qui possèdent une différentielle d'après Gâteaux positivement définie sur l'ensemble des fonctions admissibles pour le problème aux limites considéré, le théorème de Langenbach a le même rôle que le bien connu théorème de Mihlin, établi pour les opérateurs linéaires et positivement définis. En ce qui concerne le théorème d'existence et d'unicité de la solution classique pour le problème de la torsion élasto-plastique il a été obtenu avec une technique propre à la théorie de Leray-Schauder.

Pour tous les cas pour lesquels nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution dans le sens de Sobolev, nous avons démontré aussi l'unicité de la solution classique dans l'hypothèse qu'elle existe. Ce résultat est une conséquence du fait que les opérateurs considérés sont strictement monotones d'après Minty-Browder sur l'ensemble des fonctions admissibles. À cette fin il a été nécessaire d'obtenir des inégalités différentielles qui ont joué pour les problèmes considérés le même rôle que les inégalités du type de Korn pour les problèmes analogues de la théorie de l'élasticité linéaire et isotrope.

Pour ce qui est de la réalisation numérique des solutions nous dirons les suivantes : les solutions généralisées des problèmes considérés ont été obtenues comme des limites dans $L_2(\Omega)$ (ou dans $\mathbf{L}_2(\Omega)$) de chaque suite minimisante pour une fonctionnelle attachée à chaque problème considéré grâce au théorème variationnel de Langenbach, et donc, la construction d'une approximante de la solution revient à construire le terme d'un certain ordre d'une suite minimisante. Nous avons fait cela selon une méthode du type de Ritz, le raisonnement étant conduit jusqu'à un problème qui peut être programmé à une machine électronique.

Encore une question : la solution généralisée étant un élément de $L_2(\Omega)$ (ou de $\mathbf{L}_2(\Omega)$) on pose la question de la régularité de cette solution. Nous avons répondu en démontrant que la solution appartient à un espace énergétique du problème non linéaire considéré dont la norme est équivalente d'une norme d'un espace de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ et aussi, en signalant la possibilité d'utiliser une idée de Langenbach fondée sur une technique des espaces d'Orlicz.

Je me permet de finir ces lignes en exprimant mes remerciements à mes professeurs de la Faculté de Mathématique-Mécanique de l'Université de Bucarest qui ont contribué à ma formation mathématique.

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: MOCANU PETRE
Tehnoredactor: ION DUMITRU

Bun de tipar 20.IV.1972. Hîrtie scris I A format 16/70×100 de 80G/m².
Coli de tipar 23,25. C. Z. pentru biblioteci mari 517: 433: 539.214.
C. Z. pentru biblioteci mici: 517: 539: 2

Întreprinderea poligrafică Informația, București,
str. Brezoianu nr. 23–25, Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner